

Понятие двойного интеграла

Понятие двойного интеграла

Двойной интеграл в общем виде записывается следующим образом:

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

Разбираемся в терминах и обозначениях:

- $\iint$ – значок двойного интеграла;
- D – область интегрирования (плоская фигура);
- $f(x, y)$ – подынтегральная функция двух переменных, часто она довольно простая;
- dx, dy – значки дифференциалов.

Что значит вычислить двойной интеграл?

Вычислить двойной интеграл – это значит **найти ЧИСЛО**. Самое обычное число:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = C, \text{ где } C = \text{const}$$

И крайне желательно найти его правильно =)

Результат (число) может быть отрицательным. И ноль тоже запросто может получиться. Специально остановился на данном моменте, поскольку немало студентов испытывают беспокойство, когда ответ получается «шото вроде как странный».

Многие помнят, что «обычный» определённый интеграл – тоже число. Здесь всё так же. У двойного интеграла существует и отличный геометрический смысл, но об этом позже, всему своё время.

Как вычислить двойной интеграл?

Для того чтобы вычислить двойной интеграл, его необходимо свести к так называемым *повторным интегралам*. Сделать это можно двумя способами. Наиболее распространён следующий способ:

$$\int_{\substack{? \\ ?}}^{\substack{? \\ ??}} dx \int_{\substack{? \\ ??}}^{\substack{? \\ ??}} f(x, y) dy = \int_{\substack{? \\ ?}}^{\substack{? \\ ??}} dy \int_{\substack{? \\ ??}}^{\substack{? \\ ??}} f(x, y) dx = C$$

Вместо знаков вопроса необходимо расставить пределы интегрирования. Причём одиночные знаки вопроса у внешнего интеграла – это числа, а двойные знаки вопроса у внутреннего интеграла – это функции одной переменной, зависящие от «икс».

Откуда взять пределы интегрирования? Они зависят от того, какая в условии задачи дана область. Область представляет собой обычную плоскую фигуру, с которой вы неоднократно сталкивались, например, при вычислении площади плоской фигуры или вычислении объема тела вращения. Очень скоро вы узнаете, как правильно расставлять пределы интегрирования.

После того, как переход к повторным интегралам осуществлён, следуют непосредственно вычисления: сначала берётся внутренний интеграл, а потом – внешний. Друг за другом. Отсюда и название – повторные интегралы.

Грубо говоря, задача сводится к вычислению двух определённых интегралов. Как видите всё не так сложно и страшно, и если вы совладали с «обыкновенным» определённым интегралом, что мешает разобраться с двумя интегралами?!

Второй способ перехода к повторным интегралам встречается несколько реже:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\substack{? \\ ?}}^{\substack{? \\ ??}} dy \int_{\substack{? \\ ??}}^{\substack{? \\ ??}} f(x, y) dx$$

Что поменялось? Поменялся порядок интегрирования: теперь внутренний интеграл берётся по «икс», а внешний – по «игрек». Пределы интегрирования, обозначенные звёздочками – **будут другими!** Одиночные звёздочки внешнего интеграла – это числа, а двойные звёздочки внутреннего интеграла – это обратные функции, зависящие от «игрек». $x = g(y)$

Какой бы мы ни выбрали способ перехода к повторным интегралам, **окончательный ответ обязательно получится один и тот же:**

$$\int_{\substack{? \\ ?}}^{\substack{? \\ ??}} dx \int_{\substack{? \\ ??}}^{\substack{? \\ ??}} f(x, y) dy = \int_{\substack{? \\ ?}}^{\substack{? \\ ??}} dy \int_{\substack{? \\ ??}}^{\substack{? \\ ??}} f(x, y) dx = C$$

Алгоритм решения двойного интеграла:

Систематизируем информацию: в каком порядке нужно решать рассматриваемую задачу?

1) Необходимо выполнить чертёж. **Без чертежа задачу не решить.** Точнее, решить можно, но это будет похоже на игру в шахматы вслепую. На чертеже следует изобразить область , которая представляет собой плоскую фигуру. Чаще всего фигура незамысловата и ограничена какими-нибудь прямыми, параблами, гиперболами и т.д. Как быстро и грамотно выполнить чертёж, можно посмотреть в методическом материале [Графики и основные свойства элементарных функций](#). Итак, этап первый – выполнить чертёж.

2) Расставить пределы интегрирования и перейти к повторным интегралам.

3) Взять внутренний интеграл

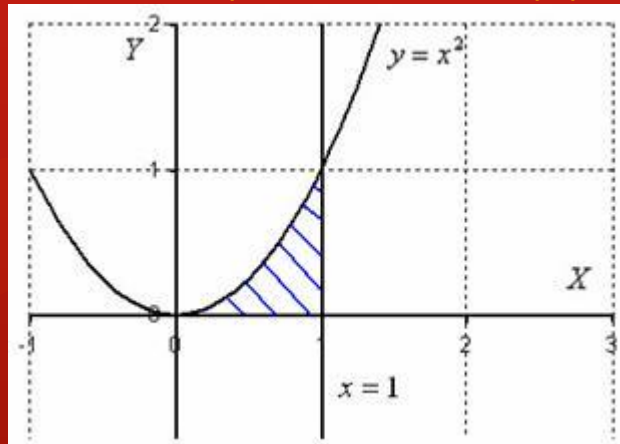
4) Взять внешний интеграл и получить ответ (число).

Пример

Дан двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ с областью интегрирования $D: x=1; y=x^2; y=0$

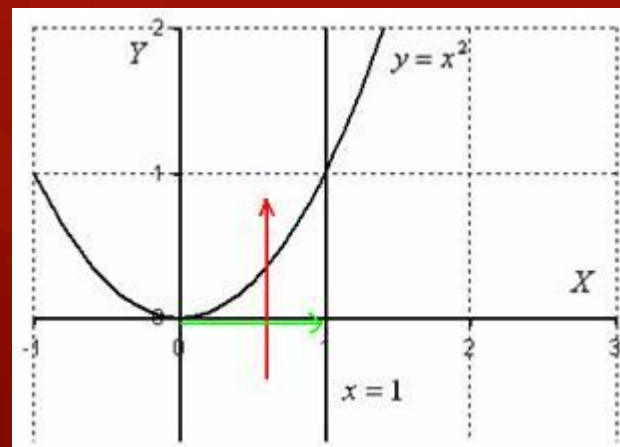
Перейти к повторным интегралам и расставить пределы интегрирования двумя способами.

Решение: Изобразим область интегрирования на чертеже:



Обычная плоская фигура и ничего особенного.

Теперь я выдам каждому из вас оружие труда – палку-копалку лазерную указку. Задача состоит в том, чтобы просканировать лучом лазера каждую точку заштрихованной области:



Луч лазера проходит область интегрирования **строго снизу вверх**, то есть указку вы ВСЕГДА держите **ниже** плоской фигуры. Луч входит в область через ось абсцисс, которая задаётся уравнением $y = 0$, выходит из области через параболу $y = x^2$ (красная стрелка). Чтобы просветить всю область, вам нужно **строго слева направо** провести указкой вдоль оси ОХ от 0 до 1 (зелёная стрелка).

Итак, что получилось:

«игрек» изменяется от 0 до x^2

«икс» изменяется от 0 до 1.

В задачах вышесказанное записывают в виде неравенств:

$$0 \leq y \leq x^2$$

$$0 \leq x \leq 1$$

Данные неравенства называют **порядком обхода области интегрирования** или просто **порядком интегрирования**

После того, как мы разобрались с порядком обхода, можно перейти от двойного интеграла к повторным интегралам:

$$\iint f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy$$

Половина задачи решена. Теперь необходимо перейти к повторным интегралам вторым способом. Для этого следует найти обратные функции. Кто ознакомился со вторым параграфом урока [Объем тела вращения](#),

тому будет легче. Смотрим на функции, которыми задается область $D: x=1; y=x^2, y=0$. Если совсем просто, то перейти к обратным функциям, это значит – выразить «иксы» через «игреки». Единственной функцией, где есть и «икс» и «игрек», является $y = x^2$.

Если $y = x^2$ то $x = \pm\sqrt{y}$, причём:

обратная функция $x = -\sqrt{y}$ задает правую ветку параболы;

обратная функция $x = \sqrt{y}$ задает левую ветку параболы.

Нередко возникают сомнения, вот, к примеру, функция $x = \sqrt{y}$ определяет левую или правую ветвь параболы? Сомнения развеять очень просто: возьмите какую-нибудь точку параболы, например, (1,1) (с правой ветви) и подставьте её координаты в любое уравнение, например, в то же уравнение $x = \sqrt{y}$

$$1 = \sqrt{1}$$

$$1 = 1$$

Получено верное равенство, значит, функция $x = \sqrt{y}$ определяет именно правую ветвь параболы, а не левую.

Как вычислить площадь плоской фигуры с помощью двойного интеграла?

Начинаем рассматривать собственно процесс вычисления двойного интеграла $\iint_D f(x, y) dx dy$ и знакомиться с его геометрическим смыслом.

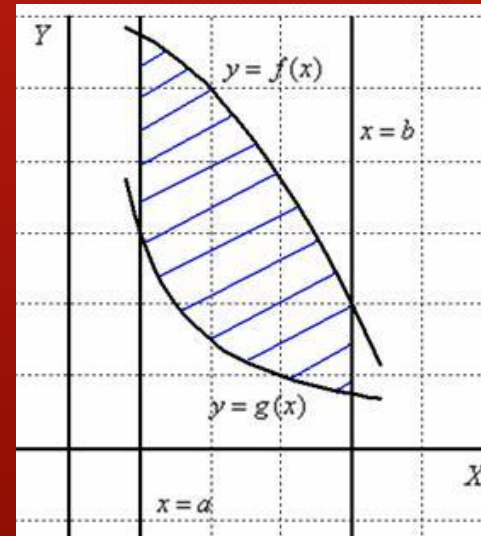
Двойной интеграл $\iint_D dx dy$ численно равен площади плоской фигуры D (области интегрирования). Это простейший вид двойного интеграла, когда функция двух переменных равна единице:

Сначала рассмотрим задачу в общем виде. Сейчас вы немало удивитесь, насколько всё действительно просто!

Вычислим площадь плоской фигуры D , ограниченной линиями $x = a, x = b, y = f(x), y = g(x)$

Для определённости считаем, что $f(x) > g(x)$ на отрезке $[a, b]$ Площадь данной фигуры численно равна: $S = \iint_D dx dy$

Изобразим область D на чертеже:



Выберем первый способ обхода области: $g(x) \leq y \leq f(x)$
 $a \leq x \leq b$

Таким образом: $S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy$

И сразу важный технический приём: **повторные интегралы можно считать по отдельности**. Сначала внутренний интеграл, затем – внешний интеграл. Данный способ настоятельно рекомендую начинающим в теме чайникам.

1) Вычислим внутренний интеграл, при этом интегрирование проводится по переменной «игрек»: $\int_{g(x)}^{f(x)} dy = (y) \Big|_{g(x)}^{f(x)} = f(x) - g(x)$

Неопределённый интеграл тут простейший, и далее используется банальная формула Ньютона-Лейбница, с той лишь разницей, что **пределами интегрирования являются не числа, а функции.**

Сначала подставили в «игрек» (первообразную функцию) верхний предел, затем – нижний предел

2) Результат, полученный в первом пункте необходимо подставить во внешний интеграл: $\int_a^b (f(x) - g(x)) dx$

Более компактная запись всего решения выглядит так:

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{g(x)}^{f(x)} dy = \int_a^b (y) \Big|_{g(x)}^{f(x)} \cdot dx = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$$

Полученная формула $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ – это в точности рабочая формула для вычисления площади плоской фигуры с помощью «обычного» определённого интеграла!

