

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

- Многофакторные эксперименты наиболее часто применяют для построения линейных по параметрам полиномиальных моделей. Вид полинома задается заранее, а его параметры определяются по экспериментальным данным.
- Широкое распространение полиномиальных моделей объясняется тем, что исследуемые экспериментальными методами функции многих переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ в ограниченной области **W** обычно можно разложить в ряд Тейлора:

$$Y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i=1}^k \beta_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^k \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon$$

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

- где $\beta_0, \beta_i, \beta_{ij}, \beta_{ii}$ - действительные значения коэффициентов уравнения;
- x_i, x_j - факторы;
- Y - отклик;
- ϵ - слагаемые третьего и более высокого порядка малости.

- Если модель включает в себя переменную $(l - 1)$ степени, то данная переменная в эксперименте должна принимать не менее l значений или уровней.

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^k b_{ij} x_i x_j$$

- В уравнении регрессии коэффициенты b_i являются оценками соответствующих коэффициентов β_i , а y - оценка отклика Y .

Метод наименьших квадратов

$$y = b_0 + b_1 x_1.$$

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = 0$$

где $i = 1, 2, \dots, N$ – номер опыта.

$$y_i - b_0 - b_1 x_{1i} = \xi_i,$$

где ξ_i – невязка, разность между экспериментальным и вычисленным по уравнению регрессии значениями y в i -й экспериментальной точке.

$$U = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i})^2 = \min.$$

Метод наименьших квадратов



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial b_0} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial b_1} = 0 \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) &= 0 \\ -2 \sum_{i=1}^N (y_i - b_0 - b_1 x_{1i}) x_{1i} &= 0 \end{aligned} \right\}$$
$$\left. \begin{aligned} Nb_0 + \sum_{i=1}^N x_{1i} b_1 &= \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{1i} b_0 + \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 b_1 &= \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} \end{aligned} \right\}.$$

Метод наименьших квадратов

□ .

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N y_i \cdot \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} \cdot \sum_{i=1}^N x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_{1i} \right)^2},$$

$$b_1 = \frac{N \cdot \sum_{i=1}^N y_i x_{1i} - \sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_{1i}}{N \cdot \sum_{i=1}^N x_{1i}^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_{1i} \right)^2}.$$

Метод наименьших квадратов

$$b_j = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_{ji}}{N}.$$

- В этой формуле $j = 0, 1, 2 \dots, k$ – номер фактора. Ноль записан для вычисления b_0 .

Полный факторный эксперимент

- Эксперимент, в котором реализуются все возможные сочетания уровней факторов, называется **полным факторным экспериментом**.
- Если в k – мерном пространстве фактор x_1 будет принимать l_1 уровень, фактор x_2 – l_2 уровней, а фактор x_k – l_k уровней, то k – факторов образуют:
$$N = l_1 \cdot l_2 \cdot \dots \cdot l_k = \prod_{i=1}^k l_i$$
 наборов, или точек факторного пространства.
- В теории ТПЭ обычно $l_1 = l_2 = \dots = l_k$ поэтому $N = l^k$. Если число уровней каждого фактора равно двум, то имеем полный факторный эксперимент типа
 - $N = 2^k$.

Полный факторный эксперимент

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

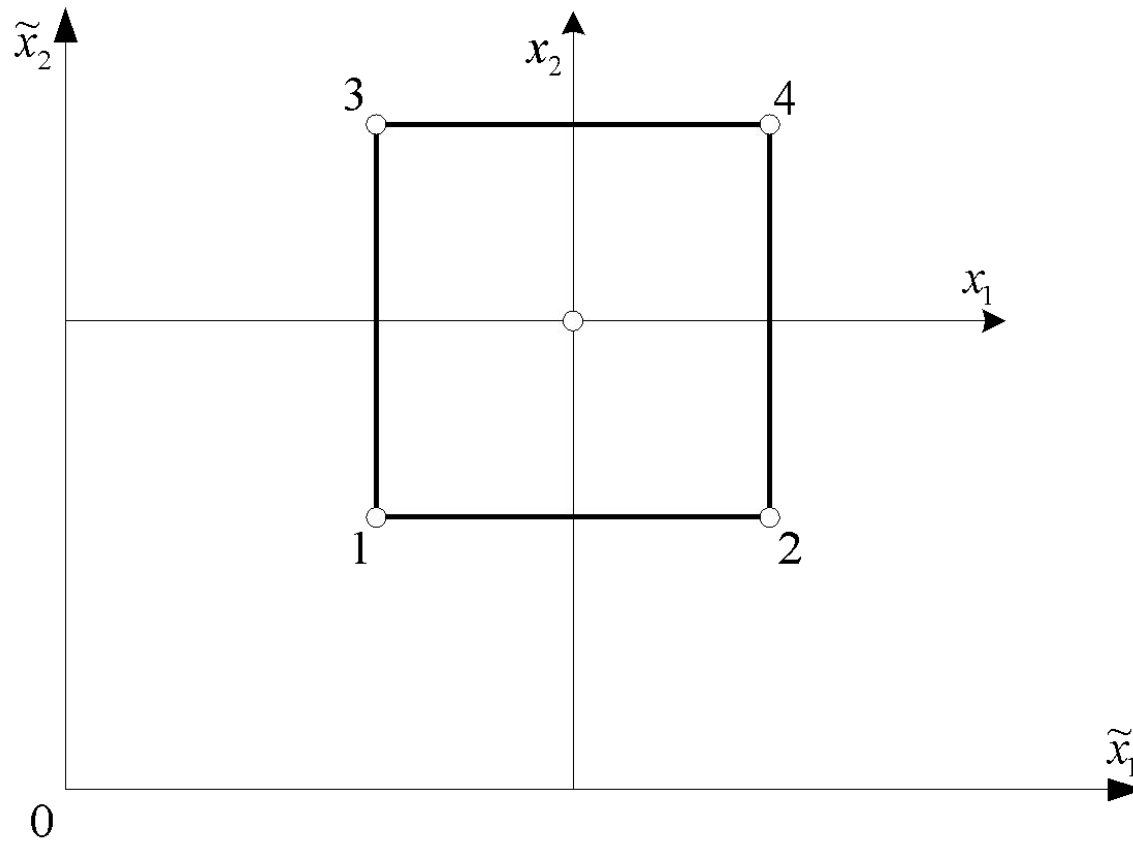
Матрица планирования 2^2

№ опыта	x_1	x_2	Y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

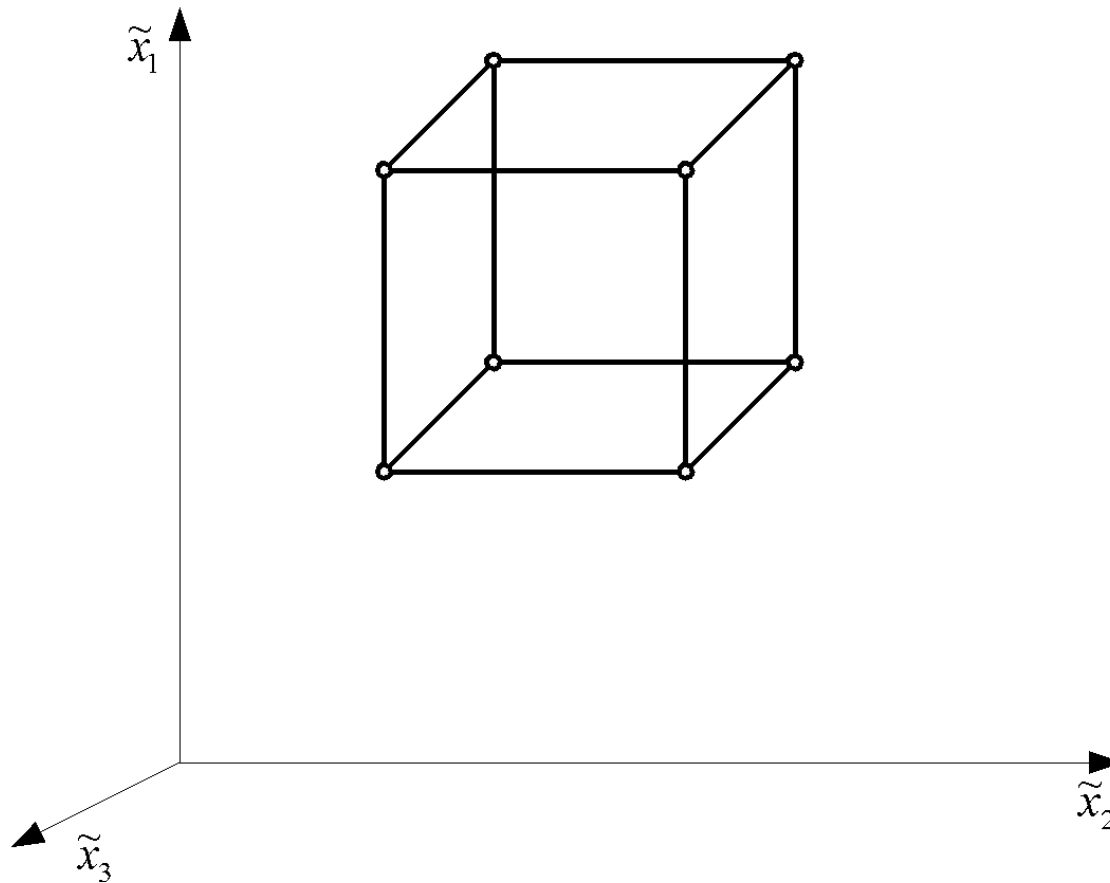
Матрицы планирования 2^3

№ опыта	x_1	x_2	x_3	y
1	+	+	+	y_1
2	-	+	+	y_2
3	+	-	+	y_3
4	-	-	+	y_4
5	+	+	-	y_5
6	-	+	-	y_6
7	+	-	-	y_7
8	-	-	-	y_8

Геометрическое изображение полного факторного эксперимента 2^2



Геометрическое изображение полного факторного эксперимента 2^3



Свойства матрицы ПФЭ типа $2k$

- **Симметричность** относительно центра эксперимента,

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} = 0,$$

- где j – номер фактора, N – число опытов, $j = 1, 2 \dots k$.

- **Условие нормировки**

$$\sum_{i=1}^N x_{ji}^2 = N.$$

- **Ортогональность матрицы планирования**

$$\sum_{i=1}^N x_{ji} x_{ui} = 0,$$

- $j \neq u, j, u = 0, 1, 2, \dots, k$.

Параллельные опыты. Рандомизация

- Для снижения случайной составляющей погрешности в каждой точке плана производят по несколько параллельных опытов (обычно 3 - 5).
- В практике эксперимента встречаются случаи, когда отклик непроизвольно меняется под влиянием различных неконтролируемых воздействий. Они могут иметь как случайный так и периодический характер, причем период может быть меньше времени проведения эксперимента, так и значительно больше.
- Для уменьшения влияния медленно изменяющихся помех используют метод, или принцип, **рандомизации**.

Параллельные опыты. Рандомизация

- Термин “ **рандомизация** ” происходит от слова random (случай, случайность). Он означает, что опыты производятся не в той последовательности, как они записаны в плане, а в случайной последовательности.
- Кроме уменьшения влияния дрейфа, рандомизация обеспечивает статистическую независимость результатов опытов между собой. Поэтому принцип рандомизации имеет основополагающее значение в теории ПЭ и должен использоваться при проведении экспериментальных исследований.