

Показательные уравнения и неравенства.

Выполнил:
Студент группы
2016-ЭОП-35Д
Васляев Дмитрий

Проверил:
Преподаватель
математики
Москвичёва Т.В.

Содержание

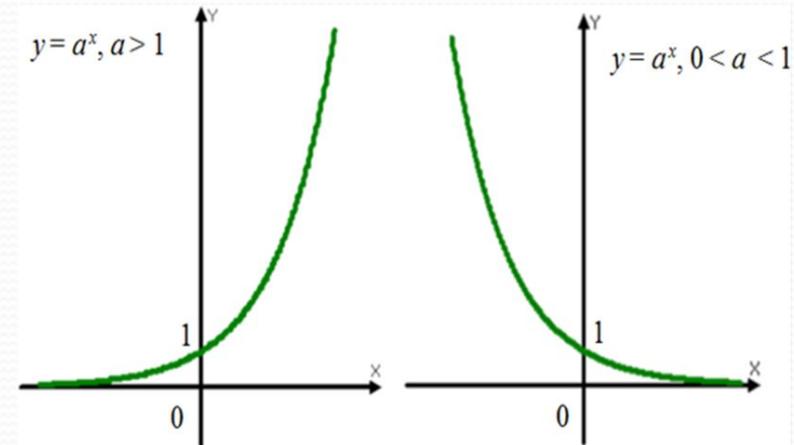
- Показательные уравнения и их функция
- Показательные неравенства
- Способы решения показательных уравнений и неравенств
- Логарифмических уравнений их функция
- Логарифмические неравенства
- Способы решения логарифмических уравнений и неравенств
- Примеры для самостоятельного решения

Что такое показательная функция?

Функцию вида $y = ax$, где $a > 0$ и $a \neq 1$, называют показательной функцией.

Основные свойства показательной функции $y = ax$:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (-\infty; +\infty)$	$D(f) = (-\infty; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (0; +\infty)$	$E(f) = (0; +\infty)$
Монотонность	Возрастает	Убывает
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная



Показательное уравнение

Показательными называются уравнения, в которых неизвестная переменная находится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных уравнений требуется знать и уметь использовать следующую несложную теорему:

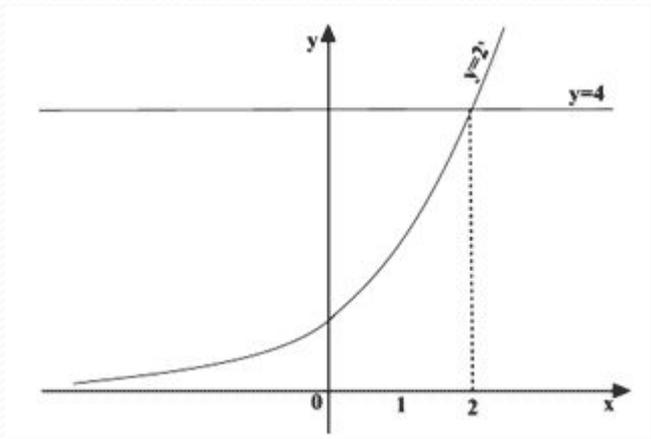
Показательное уравнение $af(x) = ag(x)$ (где $a > 0$, $a \neq 1$) равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Способы решения показательных уравнений

Выделяют две группы способов: графический и аналитические.

1. Построить графики двух функций (левая и правая части уравнения);
2. Найти абсциссы точек пересечения графиков;
3. Записать ответ.

Рассмотрим графический способ решения на примере уравнения $2x = 4$. Построим графики функций $y = 2x$, $y = 4$ и найдем абсциссу точки пересечения графиков: $x = 2$.



Ответ: $x = 2$

Основные формулы действий со степенями:

$$a > 0, b > 0 :$$

$$a^0 = 1, 1^x = 1;$$

$$a^{\frac{k}{n}} = \sqrt[n]{a^k} \quad (k \in Z, n \in N);$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y};$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x;$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

Пример 1. Решите уравнение:

$$22x+1-5\cdot 2x-88=0$$

Решение: используем приведенные выше формулы и подстановку:

$$t=2^x$$

Уравнение тогда принимает вид:

$$2t^2-5t-88=0$$

Дискриминант полученного квадратного уравнения положителен:

$$D = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-88) = 729 = 27^2 > 0$$

Это означает, что данное уравнение имеет два корня. Находим их:

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)+\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = 8, \\ t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-5)-\sqrt{729}}{2 \cdot 2} = -5,5. \end{cases}$$

Переходя к обратной подстановке, получаем:

$$\begin{cases} 2^x = 8, \\ 2^x = -5,5. \end{cases}$$

Ответ: $x=3$

Показательное неравенство

Показательными называются неравенства, в которых неизвестная переменная содержится только в показателях каких-либо степеней.

Для решения показательных неравенств требуется знание следующей теоремы:

Если $a > 1$, то неравенство $af(x) > ag(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$. Если $0 < a < 1$, то показательное неравенство $af(x) > ag(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Способы решения показательных неравенств

При решении показательных неравенств используются те же приемы, что при решении показательных уравнений.

Будьте внимательны: показательная функция в зависимости от основания может быть возрастающей ($a > 1$) или убывающей ($0 < a < 1$)

Пример:

Неравенства, сводящиеся к простейшим. Решаются приведением обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием.

$$a) 2^{x^2} > 2^{x+2}.$$

Решение:

$$2^{x^2} > 2^{x+2};$$

$x^2 > x+2$, т.к. функция $y = 2^t$ возрастает,

$$x^2 - x - 2 > 0;$$

$$x < -1; x > 2.$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$

Пример 2. Решите

неравенство:

$$16^x - 2 \cdot 12^x \leq 3^{2x+1}$$

Решение:

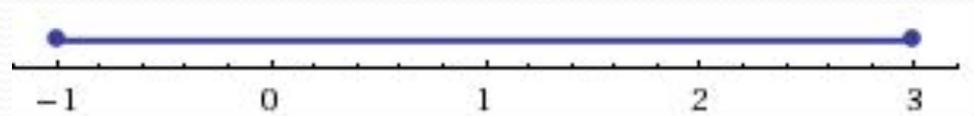
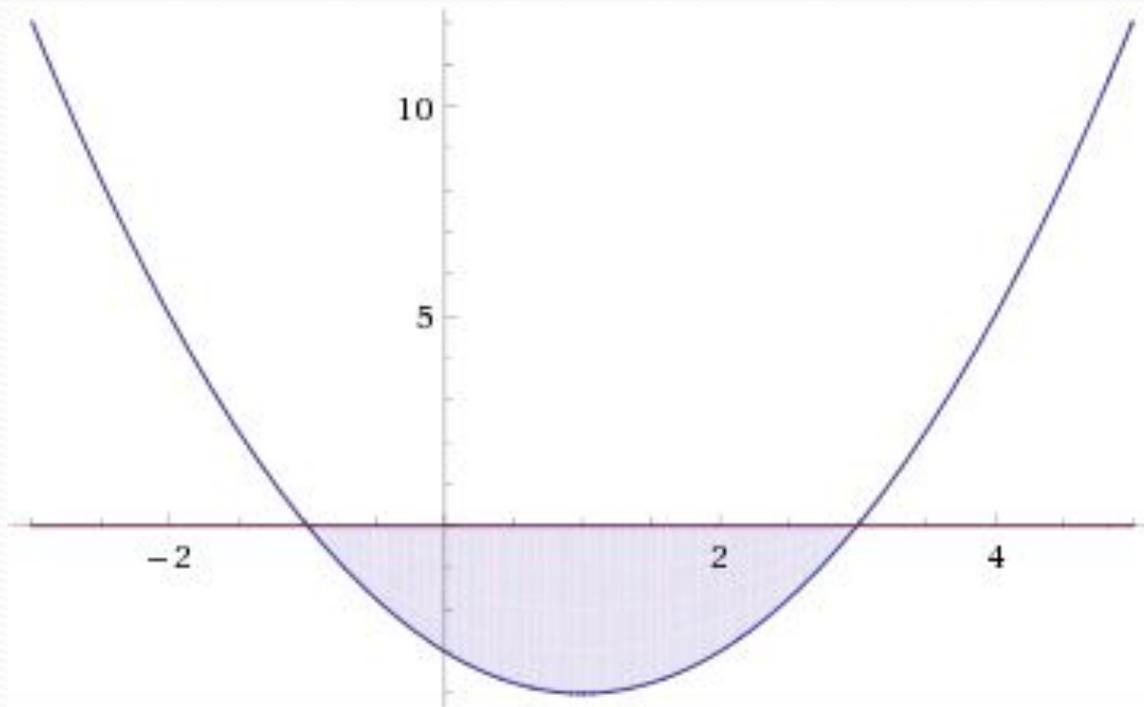
1. представим исходное неравенство в виде: $4^{2x} - 2 \cdot 4^x \cdot 3^x - 3 \cdot 3^{2x} \leq 0$

2. Разделим обе части этого неравенства на 3^{2x} , при этом (в силу положительности функции $y = 3^{2x}$) знак неравенства не изменится

3. Воспользуемся подстановкой

Тогда неравенство примет вид:

$$t^2 - 2t - 3 \leq 0$$



5. Итак, решением неравенства является промежуток, переходя к обратной подстановке

6. Левое неравенства в силу положительности показательной функции выполняется автоматически. Воспользовавшись известным свойством логарифма, переходим к эквивалентному неравенству

7. Поскольку в основании степени стоит число, большее единицы, эквивалентным (по теореме 2) будет переход к следующему неравенству

Итак, окончательно получаем ответ:

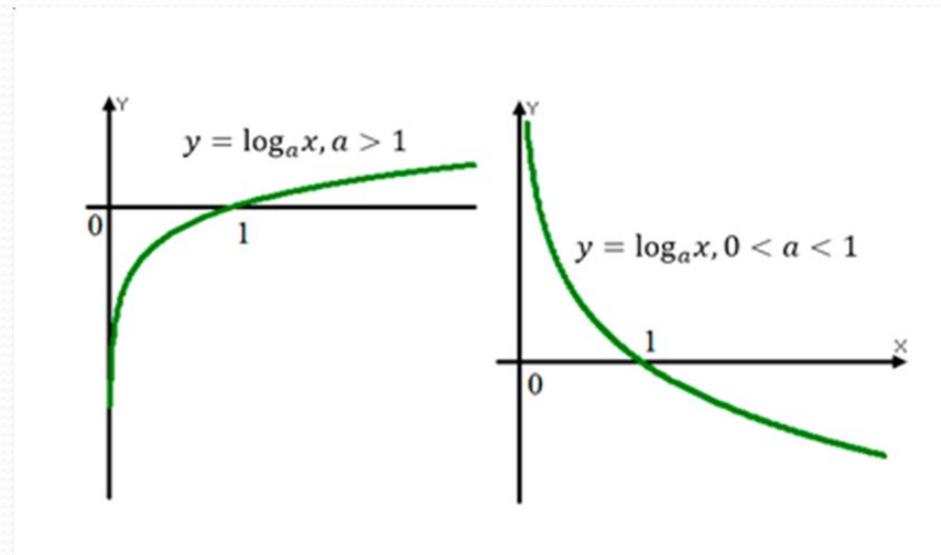
$$X \in \left(-\infty; \log \frac{4}{3} 3 \right]$$

Логарифмическая функция

- Функцию вида $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$ называют логарифмической функцией.

Основные свойства логарифмической функции $y = \log_a x$:

Свойство	$a > 1$	$0 < a < 1$
Область определения	$D(f) = (0; +\infty)$	$D(f) = (0; +\infty)$
Область значений	$E(f) = (-\infty; +\infty)$	$E(f) = (-\infty; +\infty)$
Монотонность	Возрастает на $(0; +\infty)$	Убывает на $(0; +\infty)$
Непрерывность	Непрерывная	Непрерывная
Выпуклость	Выпукла вверх	Выпукла вниз



Способы решения логарифмических уравнений.

1. По определению логарифма.
2. Потенцирование.
3. Введение новой переменной.
4. Логарифмирование обеих частей уравнения.
5. Приведение к одному основанию.
6. Функционально-графический метод.

Свойства логарифмов:

● Логарифм произведения двух положительных чисел равен сумме логарифмов этих чисел: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $a \neq 1$

Логарифм частного двух положительных чисел равен разности логарифмов этих чисел:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c, \quad a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1$$

Если a и b — положительные числа, причем $a \neq 1$, то для любого числа r справедливо равенство:

$$\log_a b^r = r \log_a b, \quad a > 0, b > 0, a \neq 1$$

Способы решения логарифмических неравенств

Простейшее логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ сводится к одной из двух систем неравенств:

1 случай. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases}, a > 1.$

2 случай. Если $\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}, 0 < a < 1.$

Пример 1 Решить неравенство: $\log_3(x-1) + \log_3(x+5) < \log_3(5x+1).$

Решение. Используя свойства логарифмов, преобразуем левую часть:

$\log_3(x-1) + \log_3(x+5) = \log_3((x-1)(x+5)) = \log_3(x^2 + 4x - 5)$ и решим систему неравенств:

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x+5 > 0 \\ 5x+1 > 0 \\ x^2 + 4x - 5 < 5x+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -2 < x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3.$$

Обращаем ваше внимание на то, что положительным должно быть **каждое** логарифмируемое выражение, а не только их произведение.

Ответ: (1; 3).

Решение логарифмических уравнений и неравенств

Решите уравнение:

$$\lg(x^2 - 6) = \lg(8 - 5x)$$

Решение:

1. В область допустимых значений входят только те x , при которых выражение, находящееся под знаком логарифма, больше нуля. Эти значения определяются следующей системой неравенств:

2. получаем промежуток, определяющий область допустимых значений данного логарифмического уравнения:

3. На основании теоремы, все условия которой здесь выполнены, переходим к квадратичному уравнению

В область допустимых значений входит только первый корень.

Ответ: $x = 7$.

Решение логарифмических уравнений и неравенств

● Пример 2. Решите уравнение:

$$\log_{0,2}(-x^2+4x+5)=\log_{0,2}(-x-31)$$

Решение: Область допустимых значений уравнения определяется системой неравенств. Очевидно, что эти два условия противоречат друг другу. То есть нет ни одного такого значения x , при котором одновременно выполнялись бы оба неравенства. Область допустимых значений уравнения является пустым множеством, а значит решений у данного логарифмического уравнения нет.

Ответ: корней нет.

Логарифмические неравенства

Теорема 2. Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$, то:

- при $a > 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству того же смысла: $f(x) > g(x)$;
- при $0 < a < 1$ логарифмическое неравенство $\log_a f(x) > \log_a g(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: $f(x) < g(x)$.

Логарифмические неравенства

● Пример 3. Решите неравенство:

$$\log_{0,5}(x^2 + x - 6) \geq \log_{0,5}(x + 4)$$

Решение:

Начнем с определения области допустимых значений неравенства. Выражение, стоящее под знаком логарифмической функции, должно принимать только положительные значения. Это значит, что искомая область допустимых значений определяется системой неравенств.

Так как в основании логарифма стоит число, меньшее единицы, соответствующая логарифмическая функция будет убывающей, а потому равносильным по теореме 2 будет переход к следующему квадратичному неравенству:

Окончательно, с учетом области допустимых значений получаем ответ: $x \in [-\sqrt{10}; -3) \cup (2; \sqrt{10}]$.

Примеры для самостоятельного решения.

1. Решите неравенство: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-5x} - 1 \leq 0.$

1) $(-\infty; 0,4); 2) (-\infty; 0,4]; 3) (0,2; +\infty); 4) [0,4; \infty);$

2. Решите неравенство: $\log_3(4 - 2x) \geq 1.$

1) $(-\infty; 0,5]; 2) (-\infty; 2]; 3) [2; +\infty); 4) [0,5; +\infty);$

3. Решите неравенство: $\log_\pi(3x + 2) \leq \log_\pi(x - 1).$

1) $(-\frac{2}{3}; +\infty); 2) (-\infty; -\frac{2}{3}); 3) [-1,5; -\frac{2}{3}); 4) \text{ Нет решений}$

Примеры для самостоятельного решения.

1. Решите уравнение: $2^{x-1} + 2^{x+1} = 2.$
2. Решите уравнение: $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,1x-1} = 4^3.$
3. Решите уравнение: $x \cdot 6^{3x} - 36 \cdot 6^{3x} = 0.$
4. Решите уравнение: $\log_6 x = \log_6 5 + \log_6 4.$
5. Решите уравнение: $8 \cdot 3^{\log_3 x} = 13x - 6.$
6. Решите уравнение: $3^{x+2} - 5 \cdot 3^x = 324.$

Показательные уравнения :

$$5^{x+2} = 125$$

$$3^x \cdot 2^x = 8^{x+3}$$

$$3^{2x} + 4 \cdot 3^x - 5 = 0$$

Показательные неравенства :

$$5^{2x+1} = 5 \cdot 5^{2x} = 5 \cdot (5^x)^2$$

a) $\sqrt{4 - 2^{x-2}} < \log_2(x - 5),$

b) $3^x + 4^x \geq 25,$

c) $\left(\frac{2x^2}{x^4 + 1}\right)^{3x^2 - x} > \left(\frac{x^4 + 1}{2x^2}\right)^{2x - 2},$

d) $(\sqrt{5} + 2)^{x-1} \geq (\sqrt{5} - 2)^{\frac{x-1}{x+1}},$

e) $3^{\sqrt[12]{x-1}} + 3^{\sqrt[3]{x-1}} > 2 \cdot 3^{\sqrt[6]{x-1}}.$

Используемая литература.

- <http://festival.1september.ru/articles/600586/>
- <http://www.yaklass.ru/materiali?mode=lsntheme&themeid=8>
- <http://www.math.md/school/praktikum/logr/logr.html>
- <http://pptcloud.ru/matematika/pokazatelnye-uravneniya-i-neravenstva>
- <http://ru.solverbook.com/primery-reshenij/primery-resheniya-logarifmicheskix-neravenstv/>
- http://free.megacampus.ru/xbookM0001/index.html?go=part-025*page.htm
- <https://yandex.ru/search/?text=%D1%80%D0%B5%D1%88%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D1%8F%20%D0%BB%D0%BE%D0%B3%D0%B0%D1%80%D0%B8%D1%84%D0%BC%D0%B8%D1%87%D0%B5%D1%81%D0%BA%D0%B8%D1%85%20%D0%BD%D0%B5%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B5%D0%BD%D1%81%D1%82%D0%B2&lr=47&clid=1985544-205&win=168>
- <http://festival.1september.ru/articles/576163/>
- <http://www.egesdam.ru/page270.php>
- <http://www.math.md/school/praktikum/expr/expr.html>



**СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ!**