

Урок в 11 академическом классе по теме:

От показательных уравнений - к показательным неравенствам

***"Что значит решить
задачу?"***

***Это значит
свести ее к уже
решенным"***

С.А. Яновский

- Какие из данных уравнений являются показательными?

1) $100^2 (0,01)^2 = 10^x$

9) $\sqrt[x]{3} \cdot \sqrt[x]{5} = 225$

2) $(x+1)^5 = 25$

10) $x^2 + 3x - 4 = 0$

3) $(\sqrt{3})^{2x} = \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{x+1} \longrightarrow$ 3) $(\sqrt{3})^{2x} = (\sqrt{3})^{x+1}$

4) $6^{\sqrt{x}} + 8^{\sqrt{x}} = 10^{\sqrt{x}}$

5) $2^x = 3 - x$

11) $(2x+1)^{x^2} = (2x+1)^x$

6) $2^{\cos^2 x} - 8^{\sin^2 x} = 0$

12) $5^{2x+12} = \sin 210^\circ$

7) $\cos(3\pi \cdot 5^x) - \cos(\pi \cdot 5^x) = \sin(\pi \cdot 5^x)$

8) $\sqrt{\frac{1}{3^x}} + 7 = 4$

Определение

Показательное

уравнение –
это уравнение,

неравенство –
это неравенство,

содержащее переменную
в показателе степени



- Каков общий вид простейших показательных уравнений?
- Метод решения?

1. $a^{f(x)} = a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$
равносильно уравнению $f(x) = g(x)$
(уравнивание показателей)

Обоснование: 1) Если степени с равными основаниями, отличными от единицы и большими нуля, равны, то показатели равны;

2) функция монотонна на $\mathbb{R}$, поэтому каждое свое значение она принимает при единственном значении аргумента.

2. $a^{f(x)} = b, a > 0, a \neq 1, b > 0$

- Каков общий вид простейших показательных неравенств?
- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

1) Равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, $a > 1$

2) Равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, $0 < a < 1$.

(сравнение показателей)

Обоснование: а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на $\mathbb{R}$, поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.

б) Если $a > 1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u > v$
если $0 < a < 1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u < v$.

Работаем устно:

Сравните x и y : $\left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^y$ $\pi^x < \pi^y$

Сравните основание a с единицей: $a^{\frac{2}{5}} > a^{\frac{3}{5}}$, $a^{-5,7} > a^{-6}$,

1. $5^x < 125$ 2. $4^x > 1$ 3. $0,2^x > \left(\frac{1}{5}\right)^2$

4. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < -12$ 5. $3^x > -1$

6. $100^{3-x} > \cos \frac{2\pi}{3}$ 7. $0,1^{3x} > 0,01$

8. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x(x-2)} > 1$

Решите двойные неравенства:

$$\underline{1 < 5^x < 125}$$

Решение. $1 < 5^x < 125$
 $5^0 < 5^x < 5^3$

т.к. показательная функция с основанием $a=5$, $a>1$ возрастает на $\mathbb{R}$, то большему значению функции соответствует большее значение аргумента, имеем

$$0 < x < 3$$

Ответ: $(0;3)$

$$\underline{3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27}$$

Решение. $3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq 27$
 $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^x \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$

т.к. основание степени $a = 1/3$, $0 < a < 1$, то из неравенства $a^u < a^t < a^v \Rightarrow$ неравенство $v < t < u$

Имеем

$$-1 > x \geq -3$$

$$-3 \leq x < -1$$

Ответ : $[-3; -1)$

Функционально-графический метод решения неравенства $f(x) < g(x)$

1. Подбором найдем корень уравнения $f(x)=g(x)$, используя свойства монотонных функций;
2. Построим схематически графики обеих функций, проходящие через точку с найденной абсциссой;
3. Выберем решение неравенства, соответствующее знаку неравенства;
4. Запишем ответ.

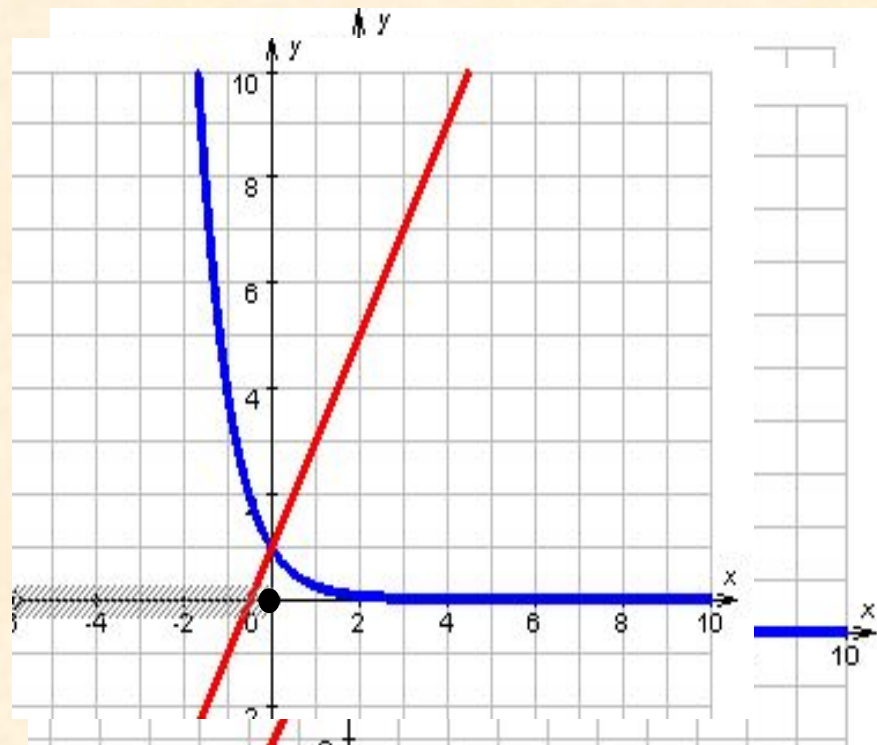
**Решить неравенства,
используя функционально-графический метод**

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

2) $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

1) Решение.

1. $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ убывает на $\mathbb{R}$
2. $g(x) = 2x + 1$ возрастает на $\mathbb{R}$
3. Уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного корня
4. Подбором $x=0$
5. Строим схематически графики через точку $(0, 1)$
6. Неравенство выполняется при $x \leq 0$
7. Ответ: $\left(-\infty; 0\right]$



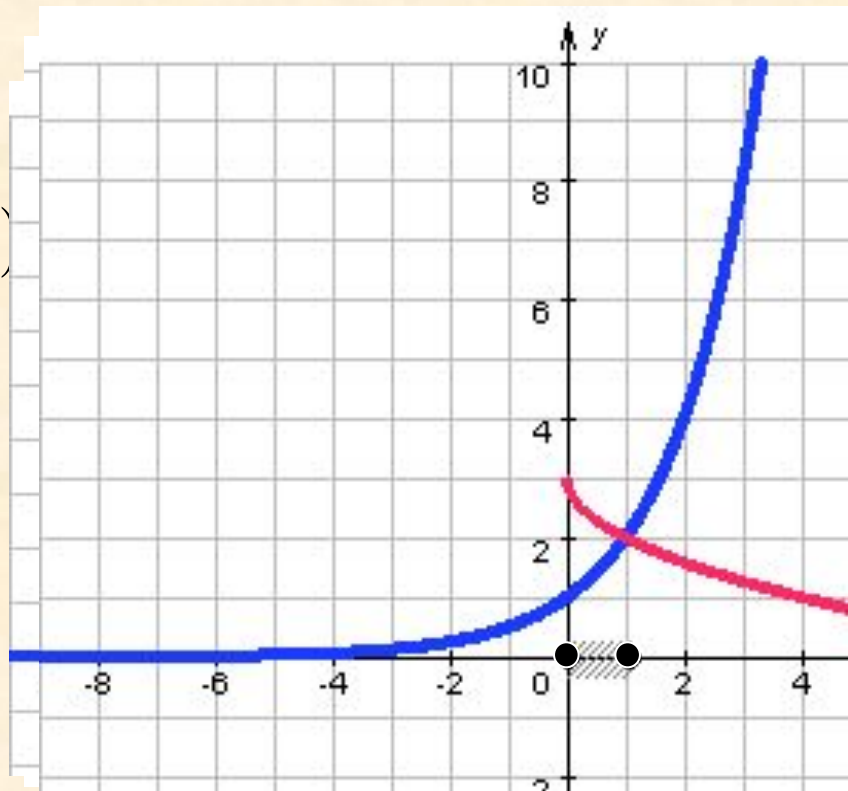
**Решить неравенства,
используя функционально-графический метод**

1) $\left(\frac{1}{4}\right)^x \geq 2x + 1$

2) $2^x \leq 3 - \sqrt{x}$

2) Решение.

1. $f(x) = 2^x$ **возраст. на $\mathbb{R}$**
2. $g(x) = 3 - \sqrt{x}$ **убывает на $[0; +\infty)$**
3. Уравнение $f(x) = g(x)$ **имеет не более одного корня**
4. Подбором **$x=1$**
5. Строим схематически графики
6. Неравенство выполняется при
 $0 \leq x \leq 1$
7. Ответ : $[0; 1]$



- Каков общий вид простейших показательных неравенств?
- Метод решения?

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}, a > 0, a \neq 1,$$

- 1) Равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, $a > 1$
- 2) Равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, $0 < a < 1$.
(сравнение показателей)

Обоснование: а) Показательная функция монотонно возрастает (убывает) на $\mathbb{R}$, поэтому большему (меньшему) значению функции соответствует большее значение аргумента.

б) Если $a > 1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u > v$
если $0 < a < 1$, то из неравенства $a^u > a^v \Rightarrow u < v$.

«Ключ»

Вариант – 1

Вариант - 2

-1	1
Б	В
2	2
$(-1; +\infty)$	$[2; +\infty)$

Задания группам:

1 группа

$$\frac{1}{2^x - 1} + 2^x = 3 \quad (>)$$

2 группа

$$(\sqrt{7} - \sqrt{6})^{\frac{x-1}{x-3}} = \sqrt[x]{(\sqrt{7} + \sqrt{6})^2} \quad (\geq)$$

3 группа

$$9^x + 6^x = 4^{x+0,5}; \quad (>)$$

4 группа

$$\sqrt{2^x - 1} + \sqrt{2^x + 2} = 3; \quad (\leq)$$

5 группа

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x + 125 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-x} = 30 \quad (<)$$

*В каждом уравнении замените знак равенства на указанный знак неравенства и решите полученное неравенство.
(Используйте при необходимости метод интервалов).*

Спасибо все

за урок!