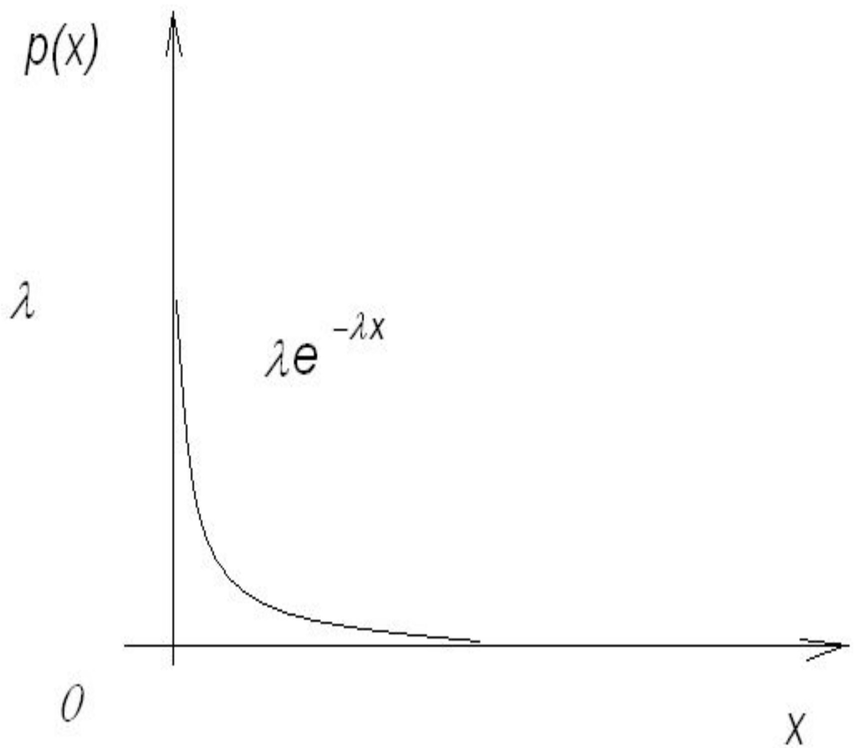
§3.6.2.2. Показательное распределение

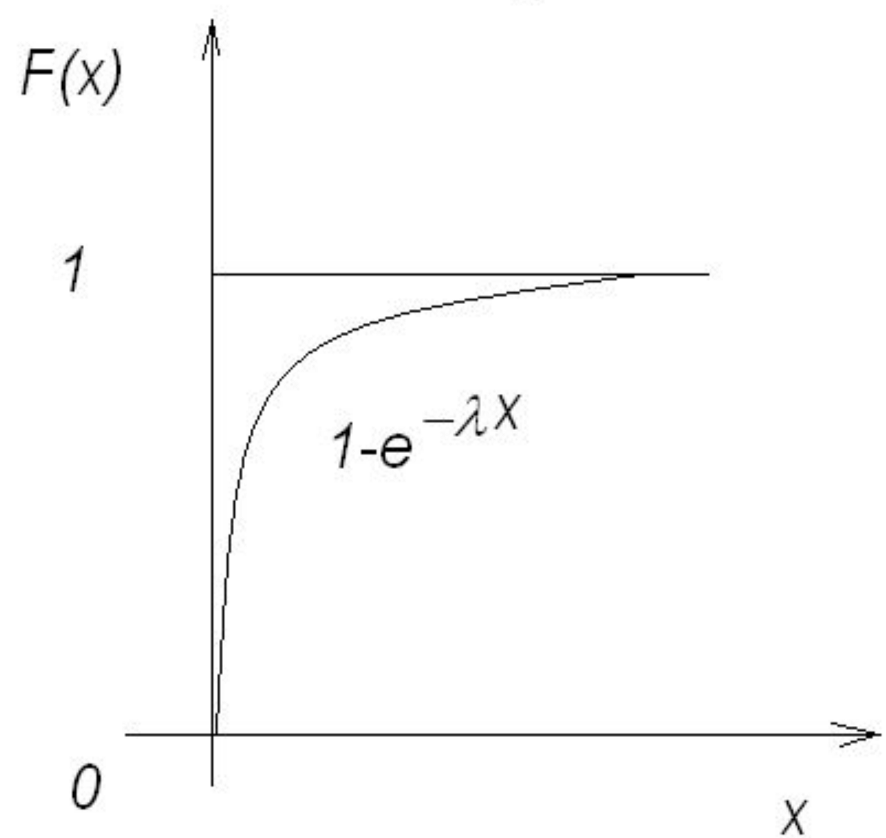
Показательным (экспоненциальным) распределением СВ называют распределение СВ, которое описывается плотностью распределения

$$p(x)= \begin{cases} 0, x < 0, \\ \lambda\, exp(-\lambda x), x \geq 0, \end{cases}$$

где λ-положительная постоянная величина.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)dy = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \lambda\, exp(-\lambda x)dx = 1 - exp(-\lambda x)$$


p(x)
λ
$\lambda e^{-\lambda x}$
0
x


F(x)
1
$1\text{-}e^{-\lambda X}$
0
X

Найдем функцию распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, x<0,\\ 1-exp(-\lambda x), x\geq 0\end{cases}$$

Определим числовые характеристики распределения.

Вычислим МО по формуле:

M[X]= $\int\limits_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int\limits_{0}^{\infty} \lambda x exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda}\int\limits_{0}^{\infty} \lambda x exp(-\lambda x)d(\lambda x)$

Обозначим $y=\lambda x$, $dy=d(\lambda x)$.

и проинтегрируем интеграл по частям, полагая $u=y$, $du=dy$,

а $dv=\exp(-y)dy$, $v=-\exp(-y)$.

Тогда после всех преобразований получим: $M[X]=1/\lambda$.

Вычислим дисперсию

$$D[X]=\alpha_2[X]-(M[X])^2$$

Определим второй начальный момент:

$$\alpha_2[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx = \int_0^{\infty} \lambda x^2 \exp(-\lambda x)dx = \frac{1}{\lambda^2}\int_0^{\infty}(\lambda x^2)\exp(-\lambda x)d(\lambda x)$$

Введем обозначения $y=\lambda x$, $dy=d(\lambda x)$

и проинтегрируем интеграл по частям, полагая $u=y^2$, $du=2ydy$, а $dv=\exp(-y)dy$, $v=-\exp(-y)$.

Тогда после всех преобразований получим

$$\alpha_2[X]=2/\lambda^2.$$

Дисперсия и стандартное отклонение соответственно:

$$D[X]=\alpha_2[X]-(M[X])^2 = 1/\lambda^2;$$

$$\sigma=1/\lambda.$$

Показательный закон широко используется в теории надежности при исследовании отказов и безотказной работы процессов и систем.

§3.6.2.3. Нормальное распределение

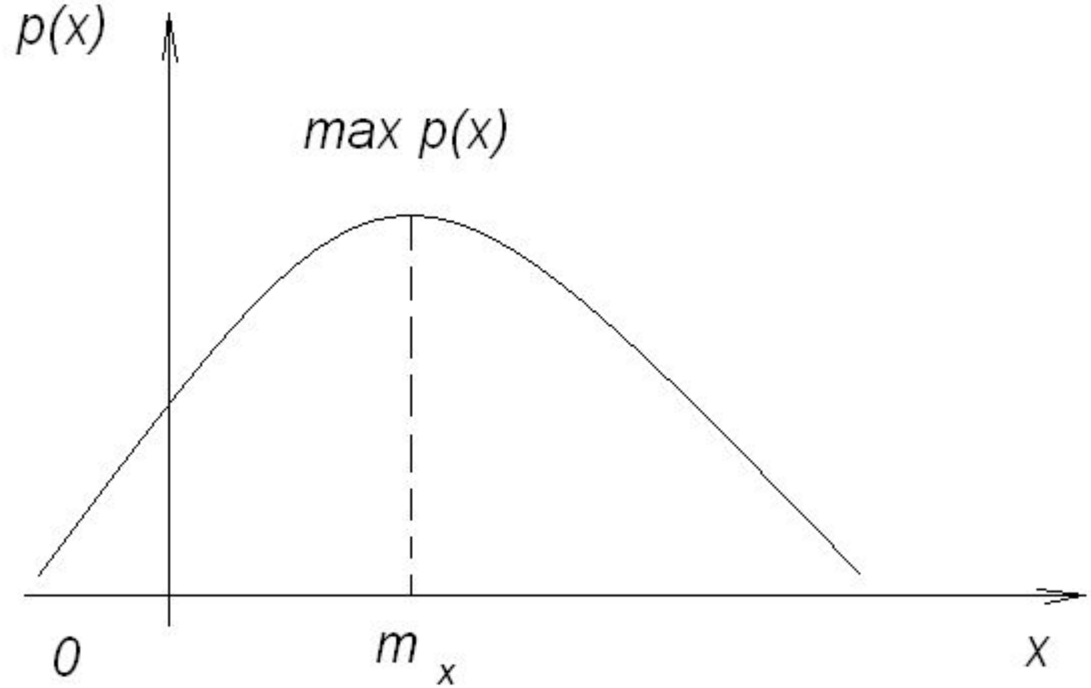
Нормальный закон распределения (закон Гаусса) наиболее часто встречающийся на практике закон распределения, описывающий случайные возмущения и отклонения основных характеристик процессов и систем, ошибки измерений и т.д.

Этот закон является предельным законом, к которому приближаются другие законы распределения при весьма часто встречающихся типичных условиях.

Непрерывная СВ называется распределенной по нормальному закону, если ее плотность вероятности определяется выражением:

$$p(x)= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp[-(x-m_x)^2/(2\sigma^2)].$$

Кривая нормального закона имеет вид:



Максимальное значение max p(x) достигается при значении $x=m_x$ и равно

max p(x)=1/ $\sigma\sqrt{2\pi}$. При $x\to\infty$ плотность

$p(x)\to 0$. Параметры m_x и σ называются параметрами распределения.

Вычислим основные характеристики СВ X.

МО:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\exp[-(x-m_x)^2/(2\sigma)^2]dx$$

Полагая, что $t = \dfrac{x-m_x}{\sigma\sqrt{2}}$ и $x = \sigma\sqrt{2}t + m_x$, $dx = \sigma\sqrt{2}dt$

получим

$$M[X] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma\sqrt{2}t + m_x)\exp[-t^2]\sigma\sqrt{2}dt =$$

$$= -\frac{\sigma\sqrt{2}}{2\sqrt{\pi}}\exp[-t^2]\Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\exp[-t^2]dt = m_x$$

т.к.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t \exp[-t^2]dt = 0$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp[-t^2]dt = \sqrt{\pi}$$

- интеграл Эйлера-Пуассона.

Т.о. $M[X] = m_x$.

Определим теперь дисперсию:

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 p(x) dx =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \exp[-(x - m_x)^2 / (2\sigma)^2] p(x) dx$$

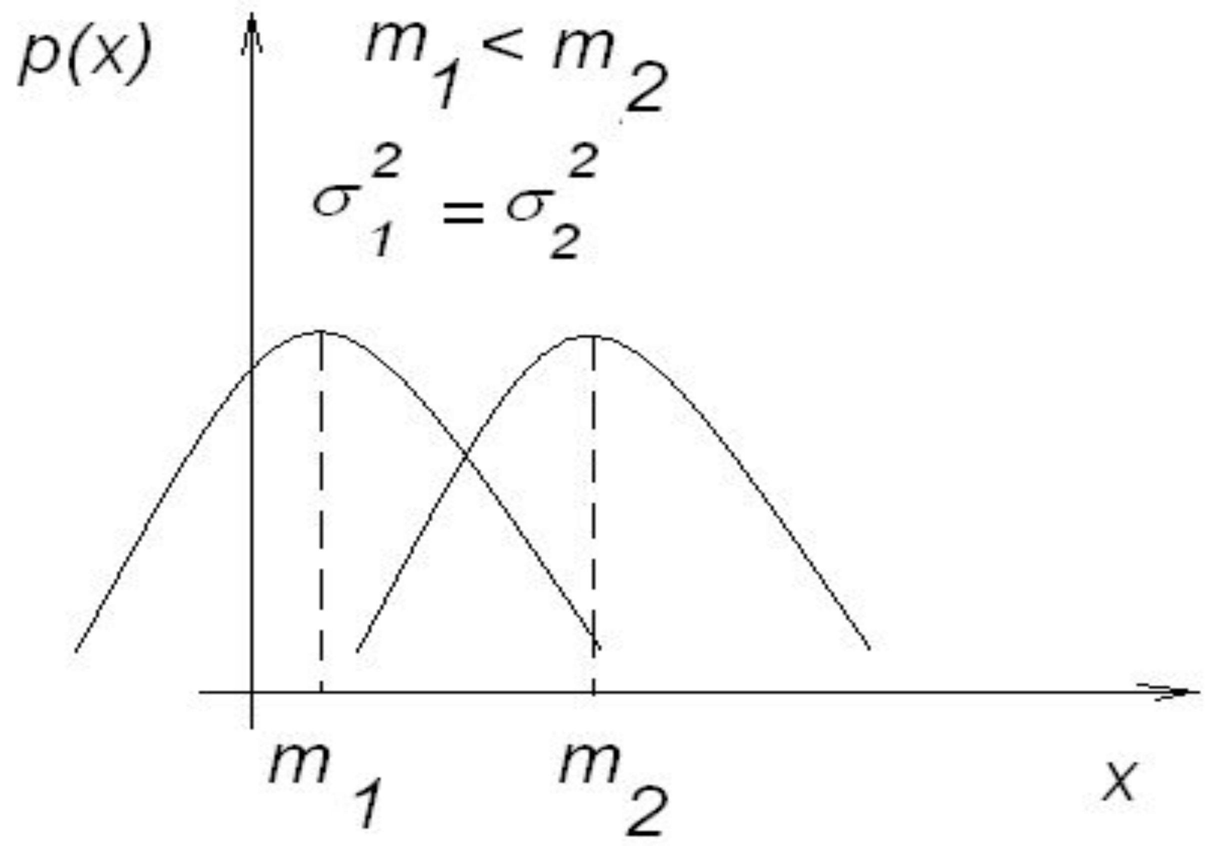
Заменим переменную $t = \frac{x - m_x}{\sigma\sqrt{2}}$ и

применим интегрирование по частям (u=t, dv=2texp(-t^2)dt, du=dt, v=-exp(-t^2))

После всех преобразований получим $D[X]=\sigma^2$, поскольку $-\exp(-t^2)$ при $t\rightarrow\pm\infty$ убывает быстрее, чем возрастает t.

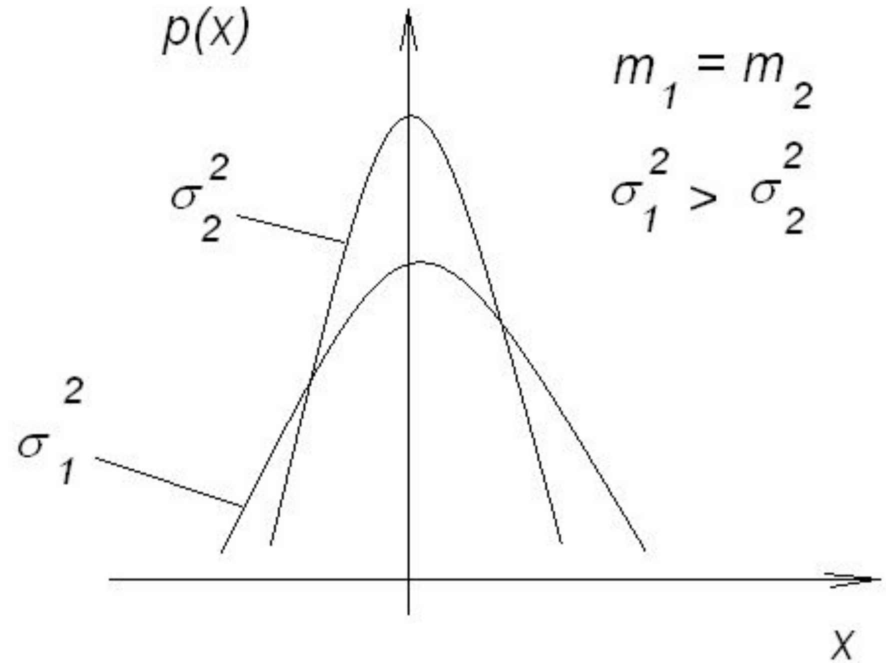
Рассмотрим влияние параметров нормального распределения на форму кривой распределения.

Из выражения для плотности вероятности нормального распределения следует, что m_x является центром симметрии и рассеивания, Т.к. изменение (x-m_x) на обратный знак не влияет на кривую распределения. Увеличение или уменьшение m_x ведет к смещению кривой распределения



Увеличение или уменьшение σ^2 ведет соответственно к увеличению крутизны и пологости кривой распределения .

Т.о. параметр m_x характеризует положение кривой Распределения на оси x, а параметр σ^2 характеризует форму кривой.



Функция распределения случайной величины X находится по формуле

$$F[X]=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-m_x}{\sigma}\right)$$

Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), вычисляется по формуле

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-m_x}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_x}{\sigma}\right)$$

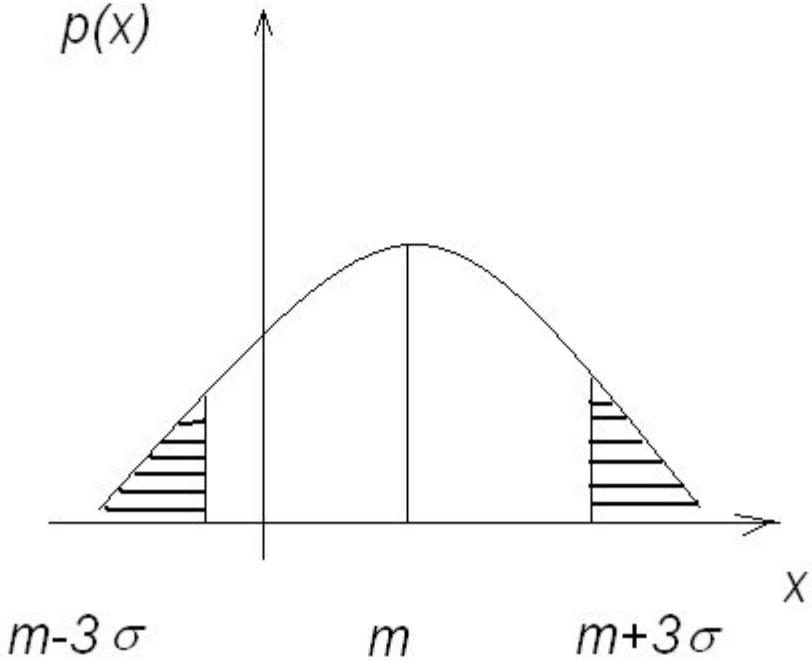
где Ф(x) - функция Лапласа.

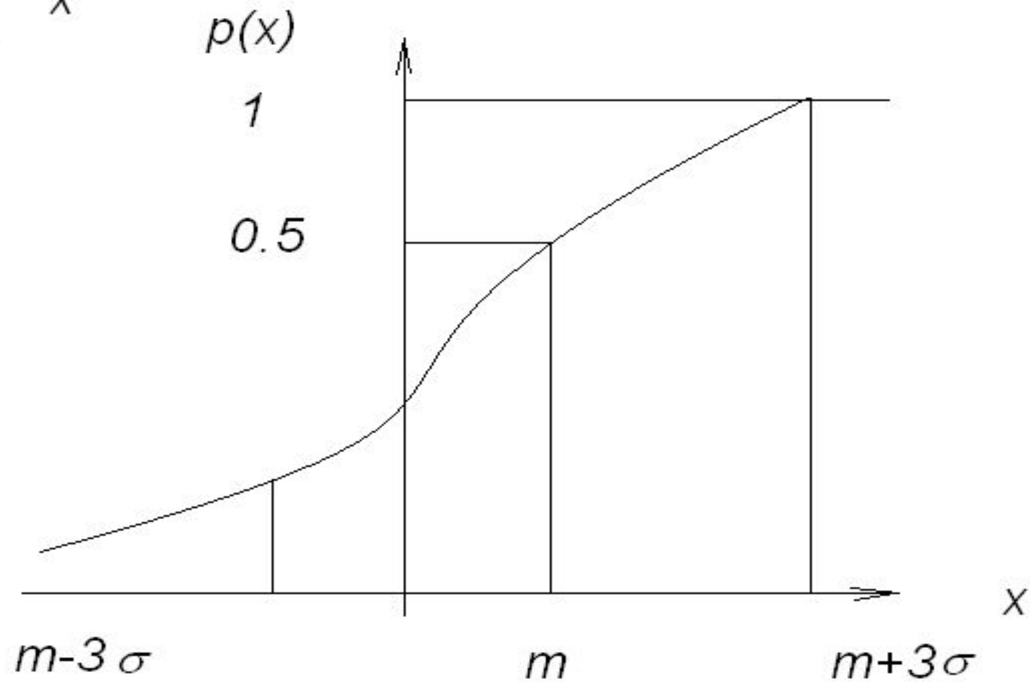
Функция распределения случайной величины X находится по формуле

Для случайной величины X, распределенной по нормальному закону, вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right)$$

где Ф(*x*) - функция Лапласа.


p(x)
X
m-3σ
m
m+3σ


p(x)
1
0.5
X
m-3σ
m
m+3σ

Правило трёх сигм.

Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина её отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения с вероятностью 0,9973.

Если закон распределения СВ неизвестен, а известны только m и σ, на практике обычно считают отрезок $m \pm 3\sigma$, участком практически возможных значений СВ.