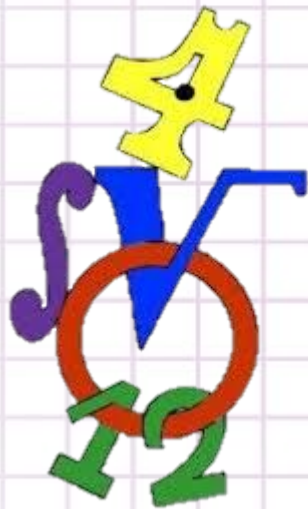


Похідна та її застосування



***” Математику вже тому вивчати
потрібно, що вона розум до
порядку приводить ! ”***

М. Ломоносов



Історична довідка про похідну

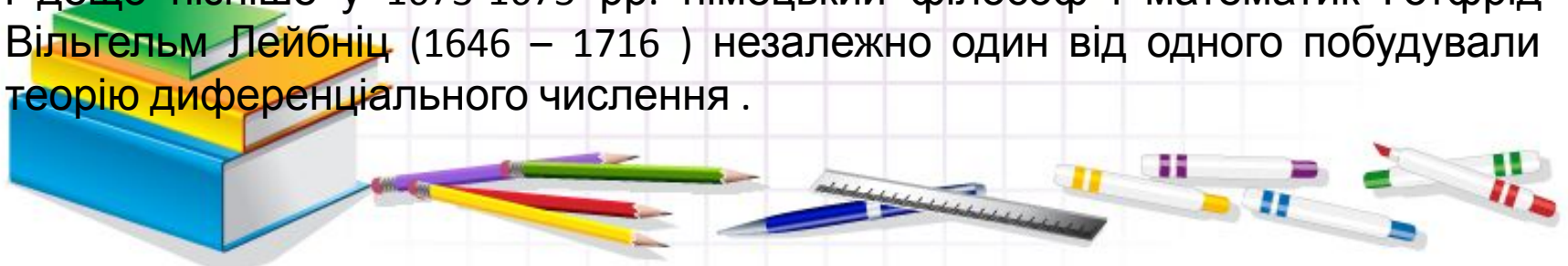
Похідна – одне з фундаментальних понять математики.

Відкриттю похідної та основ диференціального числення передували роботи французьких математиків П'єра Ферма (1601-1665), який у 1629 р. запропонував способи знаходження найбільших і найменших значень функцій, проведення дотичних до довільних кривих, що фактично спиралися на застосування похідних, а також Рене Декарта (1596-1650), який розробив метод координат і основи аналітичної геометрії.

Наука, що на сьогодні називається математичним аналізом, виникла в працях багатьох видатних математиків XVII століття - спочатку у вигляді окремих теорем та методів розв'язування деяких задач.

До кінця XVII століття основні положення цієї нової для того часу науки остаточно оформилися (причому одночасно) в роботах двох найвизначніших учених тієї епохи - англійського фізика та математика Ньютона та німецького математика і філософа Лейбніца.

У 1670-1671рр. англійський математик і механік Ісаак Ньютон (1643-1727) і дещо пізніше у 1673-1675 рр. німецький філософ і математик Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646 – 1716) незалежно один від одного побудували теорію диференціального числення .



Історична довідка про похідну

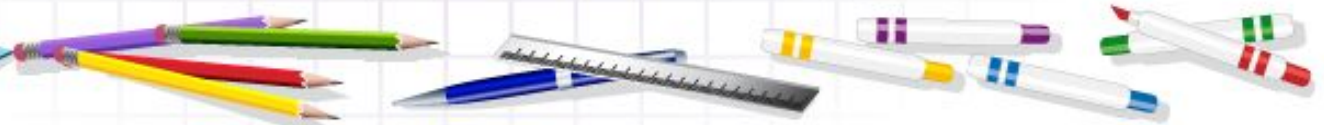


Готфрід Вільгельм Лейбніц

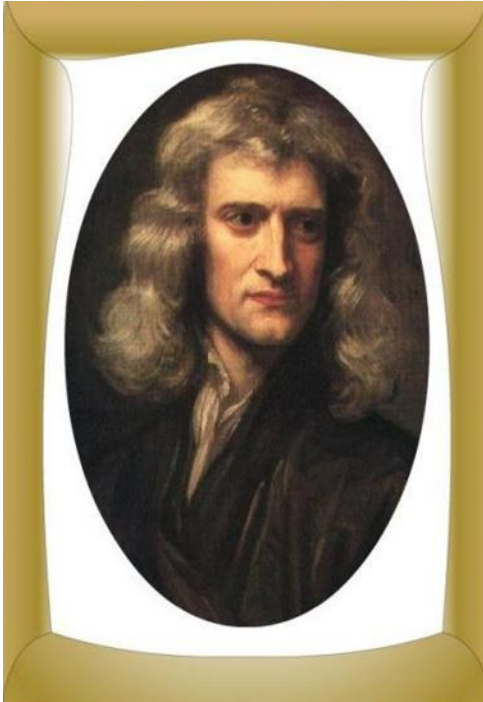
Ньютон прийшов до поняття похідної, розв'язуючи задачі про миттєву швидкість, а Лейбніц – розглядаючи геометричну задачу про проведення дотичної до кривої. Термін «похідна» ввів у 1797 р. французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736 – 1813). Він ввів і сучасні позначення для похідної у вигляді y' та f' .

Велику роль у розвитку диференціального числення відіграв видатний математик, фізик, механік і астроном Леонард Ейлер, який написав підручник « Диференціальне числення» (1755 р.).

За допомогою диференціального числення було розв'язано багато задач теоретичної механіки, фізики, астрономії. Зокрема, використовуючи методи диференціального числення, вчені передбачили повернення комети Галлея, що стало тріумфом науки XVIII ст.



Історична довідка про похідну

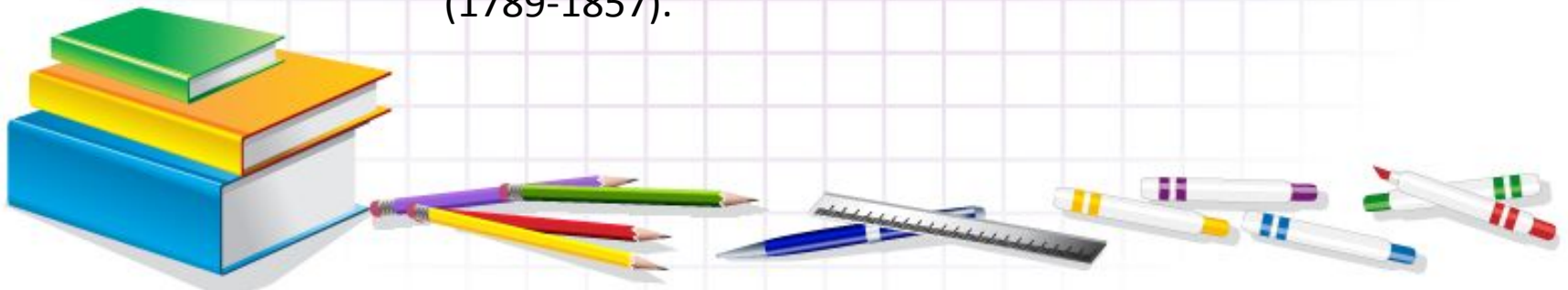


Ісаак Ньютон

Ключовими поняттями математичного аналізу є поняття функції, границі, похідної та інтеграла.

Термін „функція” вперше запропонував у 1692 р. Готфрід Вільгельм Лейбніц для характеристики відношення відрізків, а перше означення функції, яке вже не було пов'язане з геометричними уявленнями, сформулював Йоган Бернуллі (1667-1748) у 1718 р. Уточнив це поняття Леонард Ейлер (1707-1783) і ввів символ функції $f(x)$.

Термін „границя” і відповідний символ $\lim$ вперше було введено Ісааком Ньютоном, а його строге означення сформулював у 1823 р. французький математик Огюстен Луї Коші (1789-1857).



Означення похідної

Поняття похідної – фундаментальне поняття математичного аналізу, за допомогою якого досліджують процеси і явища в природничих, соціальних і економічних науках. Вивчення різних процесів (механічного руху, хімічних реакцій, розширення рідини при нагрівання, значення електричного струму та ін.) проводять до необхідності обчислення швидкості зміни різних величин, тобто до поняття похідної.

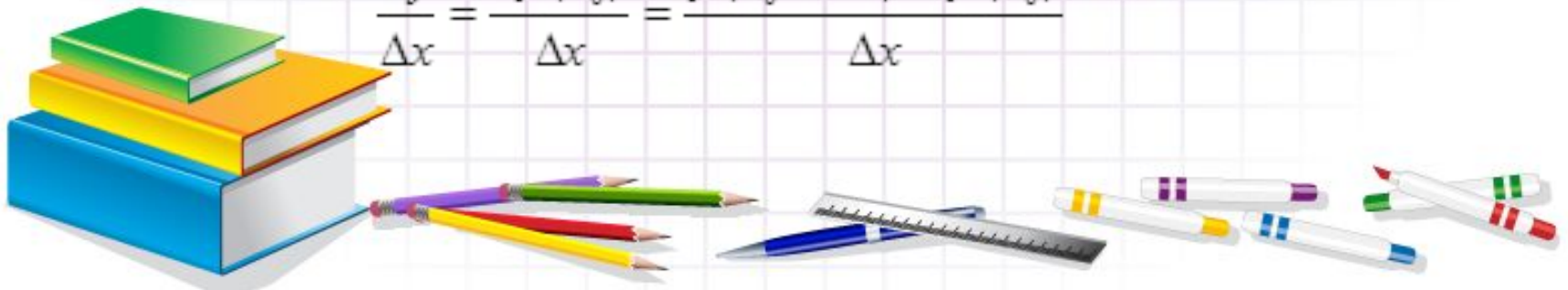
Нехай задано функцію $y=f(x)$ на деякому проміжку. Візьмемо довільну внутрішню точку x_0 даного проміжку, надамо значенню x_0 довільного приросту Δx , але такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала даному проміжку, тоді

1) Обчислимо в точці x_0 приріст $\Delta y = \Delta f(x_0)$ функції:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

- Складемо відношення:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Означення похідної

3) Знайдемо границю цього відношення при умові, що $\Delta x \rightarrow 0$, тобто:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Якщо дана границя існує, то її називають похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 і позначають $f'(x_0)$ або y' .

Похідною функції $y=f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції до приросту аргументу при умові, що приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



Таблиця похідних

№ П/П	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$	№ П/П	$y = f(x)$	$y' = f'(x)$
1	C	0	11	$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
2	x	1	12	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	x^2	$2x$	13	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
4	x^n	nx^{n-1}	14	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	15	$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
6	$\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}$	$\frac{k}{n} x^{\frac{k}{n}-1}$	16	e^x	e^x
7	$\frac{1}{x^k} = x^{-k}$	$-kx^{-k-1}$	17	a^x	$a^x \ln a$
8	$\sin x$	$\cos x$	18	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
9	$\cos x$	$-\sin x$	19	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
10	$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	20	$ x $	$\begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0 \\ 0, & \text{якщо } x = 0 \\ -1, & \text{якщо } x < 0 \end{cases}$

Приклади знаходження похідних

Приклад 1. $f(x) = x^3 - x^2 + x - 4$;
 $f'(x) = (x^3 - x^2 + x - 4)' = (x^3)' - (x^2)' + (x)' - 4' = 3x^2 - 2x + 1 + 0 = 3x^2 - 2x + 1$;

Приклад 2. $f(x) = \cos x + \sin x + 5$;
 $f'(x) = (\cos x + \sin x + 5)' = (\cos x)' + (\sin x)' + 5' = -\sin x + \cos x + 0 = \cos x - \sin x$.

Приклад 3. $f(x) = x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x$
 $f'(x) = (x^6 + \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x)' = (x^6)' + (\operatorname{tg} x)' - (\operatorname{ctg} x)' = 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} - \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right) =$
 $= 6x^5 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 6x^5 + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{4 \cos^2 x \sin^2 x} = 6x^5 + \frac{4}{\sin^2 2x}$.



Правила диференціювання



$$1. \quad \boxed{\text{|||||}}' = \boxed{\text{|||||}}$$

$$2. \quad \boxed{\text{||}} \pm \boxed{\text{||||}}' = \boxed{\text{||}}' \pm \boxed{\text{||}}$$

$$3. \quad \boxed{\text{||}} \cdot \boxed{\text{||||}}' = \boxed{\text{||}}' \boxed{\text{||||}} + \boxed{\text{|||||}}$$

$$4. \quad \boxed{\frac{\text{||}}{\text{||}}} = \frac{\boxed{\text{||}}' \boxed{\text{||}} - \boxed{\text{|||||}}}{\boxed{\text{||}}^2}$$

Приклади диференціювання

Приклад 1.

$$y = x \cdot \sin x;$$

$$y' = (x \sin x)' = x' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x = \sin x + x \cos x;$$

Приклад 2.

$$y = 5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\operatorname{tg}x;$$

$$\begin{aligned} y' &= (5x^5 + 6x^2 + 2x - 7\operatorname{tg}x)' = (5x^5)' + (6x^2)' + (2x)' - (7\operatorname{tg}x)' = \\ &= 5 \cdot (x^5)' + 6 \cdot (x^2)' + 2 \cdot x' - 7 \cdot (\operatorname{tg}x)' = 5 \cdot 5x^4 + 6 \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 - 7 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \\ &= 25x^4 + 12x + 2 - \frac{7}{\cos^2 x}; \end{aligned}$$

Приклад 3.

$$y = \frac{x^3}{\sin x}.$$

$$y' = \left(\frac{x^3}{\sin x} \right)' = \frac{(x^3)' \sin x - x^3 (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{3x^2 \sin x - x^3 \cos x}{\sin^2 x}.$$

Похідна складеної функції



$$\begin{aligned}(f(u(x)))' &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ (f(kx + b))' &= k \cdot f'(kx + b)\end{aligned}$$

Приклад 1.

$$y = (3x^3 - 1)^5$$

$$y' = ((3x^3 - 1)^5)' = 5(3x^3 - 1)^4 \cdot (3x^3 - 1)' = 5 \cdot (3x^3 - 1)^4 \cdot 9x = 45x(3x^3 - 1)^4.$$



Приклади знаходження похідних

Приклад 2. $y = \cos(4\sqrt{x} + 1)$

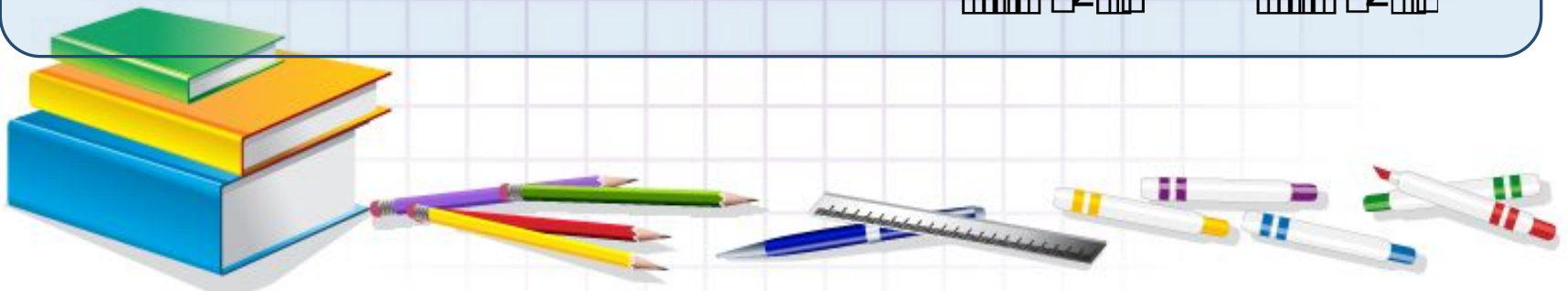
$$y' = [\cos(4\sqrt{x} + 1)]' = -\sin(4\sqrt{x} + 1) \cdot (4\sqrt{x} + 1)' = -\sin(4\sqrt{x} + 1) \cdot \frac{4}{2\sqrt{x}} = \frac{-2\sin(4\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}}$$

Приклад 3. $y = \frac{1}{7}x^7 - 3x^6$

$$y' = \left[\frac{1}{7}x^7 - 3x^6\right]' = 7 \cdot \frac{1}{7}x^{7-1} - 3 \cdot 6x^{6-1} = 7 \cdot \frac{1}{7}x^6 - 3 \cdot 6x^5 = x^6 - 18x^5$$

Приклад 4. $y = 0,5 \cdot \sqrt[3]{2x}$

$$y' = [0,5 \cdot \sqrt[3]{2x}]' = 0,5 \cdot \left[\sqrt[3]{2x}\right]' \cdot (2x)' = 0,5 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{2x}^2} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}^2}$$



$$I = \int_a^b f(x) dx$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2}$$