Подобные треуголь

Приготовили ученицы
Исламова Вероника,
Платова Валерия,
Хамидуллина Алина,
Козлова Екатерина,
Селезнева Елена.

Оглавление

Определение подобных треугол

1.1 Пропорциональные отрезки.

Отношением отрезков AB и CD называется отношение их длин, т. е.

$$\frac{AB}{CD}$$

Говорят, что отрезки AB и CD пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1, если

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$$

ПРИМЕР №*1.*

Отрезки AB и CD, длины которых равны *2* см и *1*см, пропорциональны отрезкам A_1B_1 и C_1D_1,отрезки которых равны *3*см и *1,5*см. В самом деле,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1} = \frac{2}{3}$$

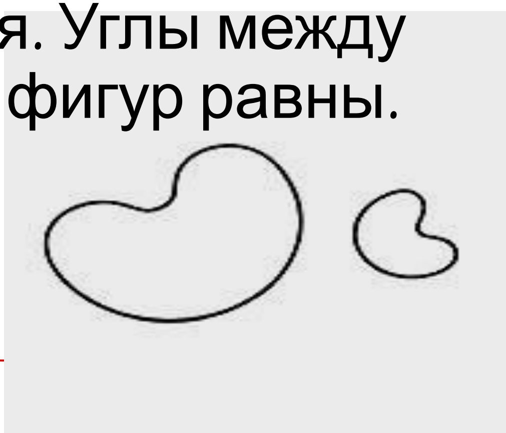
1.2. Определение подобных треугольников.

В повседневной жизни встречаются предметы одинаковой формы, но разных размеров, например футбольный и теннисный мячи, круглая тарелка и большое круглое блюдо. В геометрии фигуры одинаковой формы принято называть подобными. Так, подобными являются любые два квадрата, любые два круга. Введем понятие подобных треугольников.

1.2. Определение подобных треугольников.

ПОДОБИЕ, геометрическое понятие, характеризующее наличие одинаковой формы у геометрических фигур, независимо от их размеров. Две фигуры *F1* и *F2* называются подобными, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие, при котором отношение расстояний между любыми парами соответствующих точек фигур *F1* и *F2* равно одной и той же постоянной *k*, называемой коэффициентом подобия. Углы между соответствующими линиями подобных фигур равны.

Подобные фигуры *F1* и *F2*.

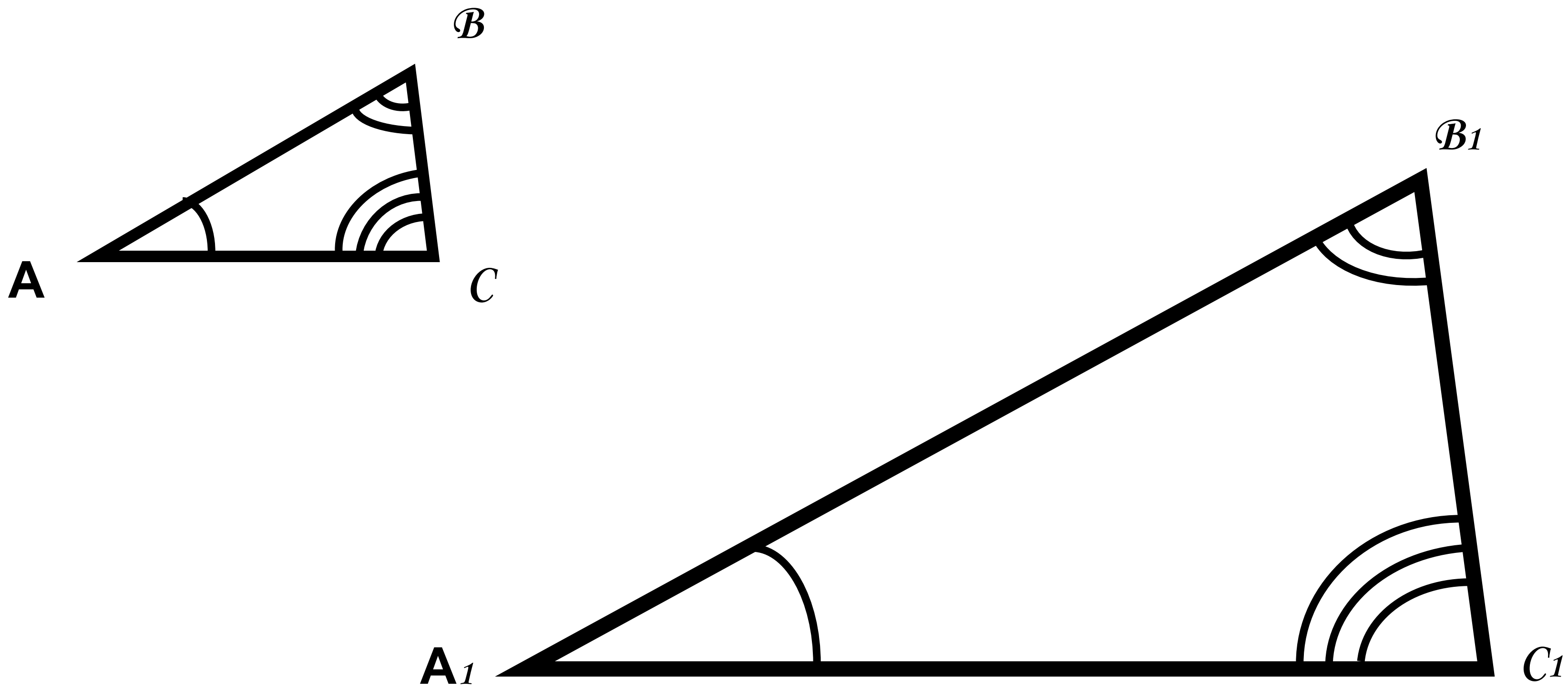


1.2. Определение подобных треугольников.

- Задача№*1.*

Пусть у двух треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. В этом случае стороны AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1 называются сходными.

1.2. Определение подобных треугольников.



AB и *A1B1, BC* и *B1C1, CA* и *C1A1-* сходственные стороны

1.2. Определение подобных треугольников.

Определение. Два треугольника называются подобными, если их углы соответственно равны и стороны одного треугольника пропорциональны сходственным сторонам другого треугольника.

Другими словами, два треугольника подобны, если их можно обозначить буквами ABC и $A_1B_1C_1$ так, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$,

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CA}{C_1A_1} = k$$

Число k, равное отношению сходственных сторон треугольников, называется коэффициентом подобия.

1.2. Определение подобных треугольников.

Подобие треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так :

$$\Delta ABC \infty \Delta A_1B_1C_1$$

Нажмите сюда и увидите подобные треугольники

1.3. Отношение площадей подобных треугольников.

Теорема. Отношение площадей двух подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Доказательство. Пусть треугольники ABC и $A1B1C1$ подобны и коэффициент подобия равен k. Обозначим буквами S и $S1$ площади этих треугольников. Так как

$\angle A = \angle A1$, то $$\frac{S}{S_1} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$$

1.3. Отношение площадей подобных треугольников.

По формулам имеем:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = k, \frac{AC}{A_1C_1} = k$$

поэтому

$$\frac{S}{S_1} = k^2$$

Теорема доказана.

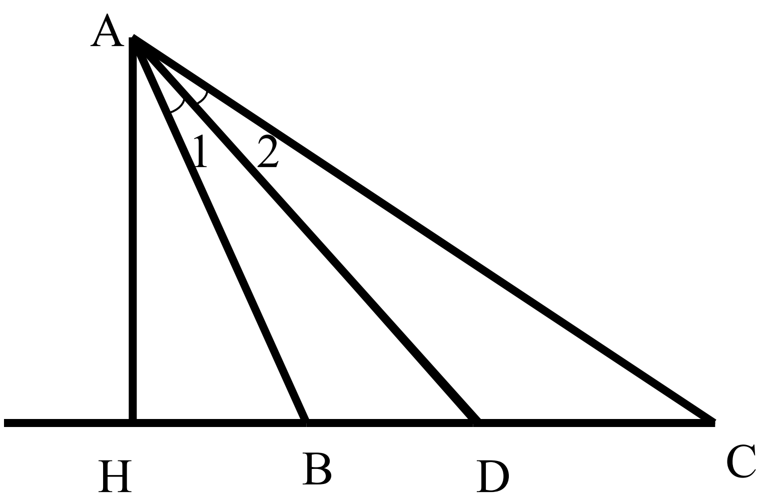
Свойства подобия.

Задача №2.

Докажите, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника

Решение.

Пусть AD – биссектриса треугольника ABC. Докажем, что $\frac{BD}{AB}=\frac{DC}{AC}$



Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту AH, поэтому $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{BD}{DC}$

Свойства подобия.

С другой стороны, эти же треугольники имеют по равному углу ($\angle A = \angle A_1$), поэтому

$$\frac{SABD}{SACD} = \frac{AB \cdot AD}{AC \cdot AD} = \frac{AB}{AC}$$

Из двух равенств для отношений площадей получаем

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}, \text{ или } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

Что и требовалось доказать.

Признаки подобия треугольн

Первый признак

Второй признак

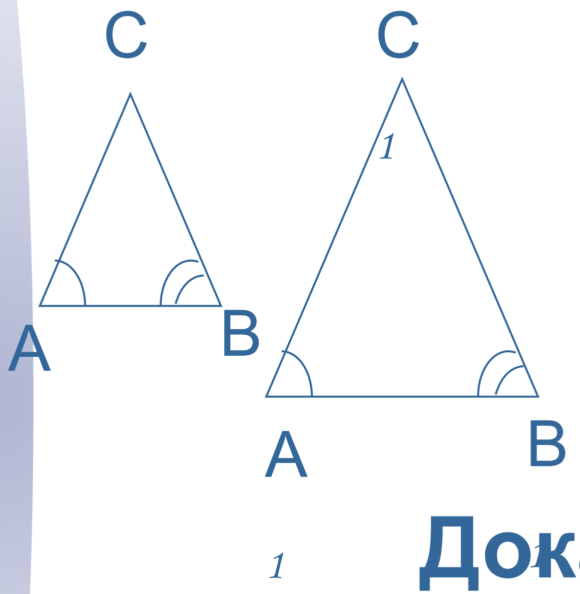
Третий признак

Первый призна

Теорема*:* Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

$$\left.\begin{aligned}\angle A &= \angle A_1\\ \angle B &= \angle B_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Первый призна



Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$\angle A = \angle A_1$

$\angle B = \angle B_1$

Доказать: $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$

Доказательство:

По теореме о сумме углов: $\angle C = 180^0 - \angle A - \angle B$, а $\angle C_1 = 180^0 - \angle A_1 - \angle B_1$, значит $\angle C = \angle C_1$.

Так как $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AB \cdot AC}{A_1B_1 \cdot A_1C_1}$ и $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot CB}{A_1C_1 \cdot C_1B_1}$

От этого следует: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$

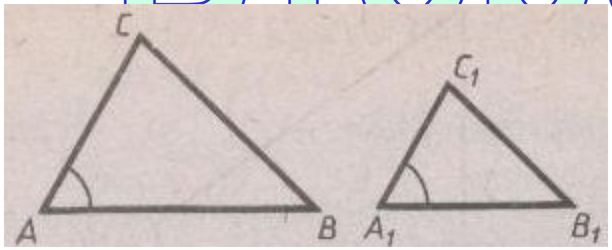
Получается, что сходственные стороны пропорциональны

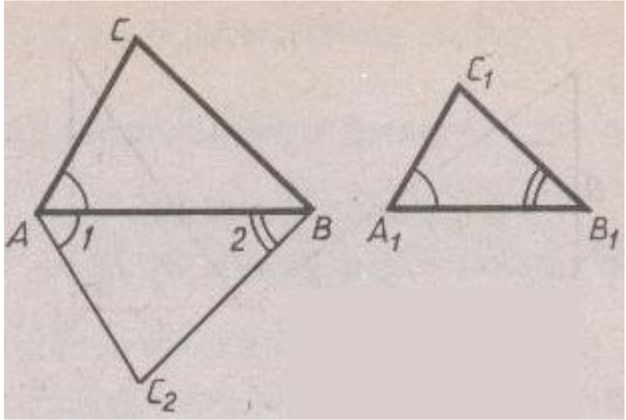
Второй призна

Теорема. Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} \\ &\angle A = \angle A_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$$

Второй призна





Дано: △ ABC и △ $A_1B_1C_1$

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ $\angle A=\angle A_1$

Д-ть: △ ABC ∾ △ $A_1B_1C_1$

Доказательство:

Рассмотрим ABC$_2$, у которого $\angle 1=\angle A_1$ и $\angle 2=\angle B_1$

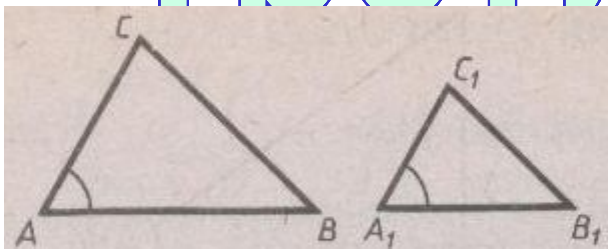
△ ABC$_2$ ∾ △ $A_1B_1C_1$ (по первому признаку), значит $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC_1}{A_1C_1}$, с другой стороны $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$, из этих равенств получается AC = AC$_2$. ABC = ABC$_2$ – по двум сторонам и углу между ними (AB общая сторона, AC = AC$_2$ и $\angle A=\angle 1$ т.к. $\angle A=\angle A_1$ и $\angle 1=\angle A_1$). Значит $\angle 2=\angle B$, $\angle 2=\angle B_1$, $\angle B=\angle B_1$

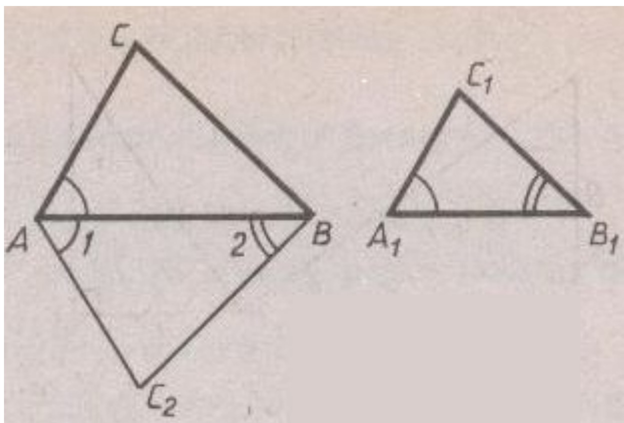
Третий призна

Теорема*:* Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, то такие треугольники подобные.

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = k \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$$

Третий признак





Дано: △ ABC и △ $A_1B_1C_1$

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$$

Д-ть: △ ABC ∽ △ $A_1B_1C_1$

Доказательство:

Рассмотрим △ ABC_2, у которого $\angle 1=\angle A_1$ и $\angle 2=\angle B_1$

△ ABC_2 ∽ △ $A_1B_1C_1$ (по первому признаку), значит $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}=k$

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=k$ и $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC_2}{B_1C_1}=\frac{AC_2}{A_1C_1}=k$ $\Rightarrow$ △ ABC = △ ABC_2

значит $\angle A=\angle 1$, а так как $\angle 1=\angle A_1$, то $\angle A=\angle A_1$

Значит △ ABC ∽ △ $A_1B_1C_1$

Применение подобия к доказательству теорем и задач

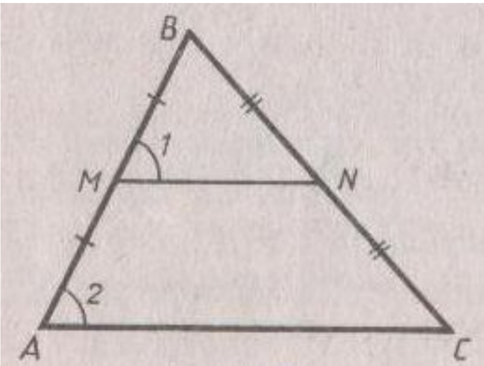
- Средняя линия треугольника
- Медианы в треугольнике
- Высота в треугольнике
- Среднее пропорциональное
- Следствие *1*
- Следствие *2*

Средняя линия треугольника

Средняя линия треугольника – это отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

Теорема*:* Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Средняя линия треугольника



Дано: $\triangle ABC$

MN – средняя линия

Доказать:

$MN \parallel AC$ и $MN = 1/2 AC$

Доказательство:

$\triangle BMN$ и $\triangle BAC$ – подобны, так как

1) $\angle B$ – общий

2) $BM : BA = BN : BC = 1:2$

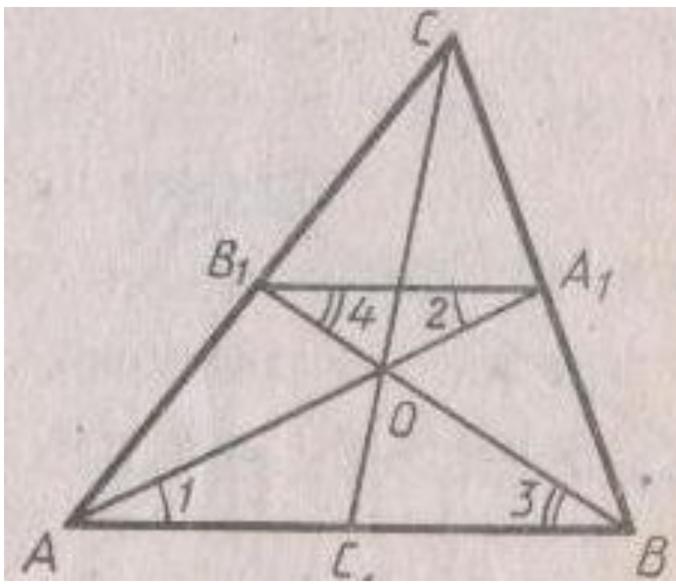
Значит $\angle BMN = \angle BAC$ и $MN/AC = 1/2$

То $MN \parallel AC$ и $MN = ½$

Теорема доказана.

Медианы в треугольнике

Меридианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую меридиану в отношении *2:1,* считая от вершины.



Дано: $\triangle$ ABC

т.О – пересечение медиан

ВВ1 и АА1

$BB_1 \cap AA_1 \cap CC_1 = O$

Доказать: $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1} = \frac{2}{1}$

Медианы в треугольнике

Доказательство:

A_1B_1 – средняя линия, и $A_1B_1 // AB$, поэтому $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$

Значит $\triangle AOB \sim \triangle A_1OB_1$ (по двум углам), то $\frac{AO}{A_1O} = \frac{BO}{B_1O} = \frac{AB}{A_1B_1}$

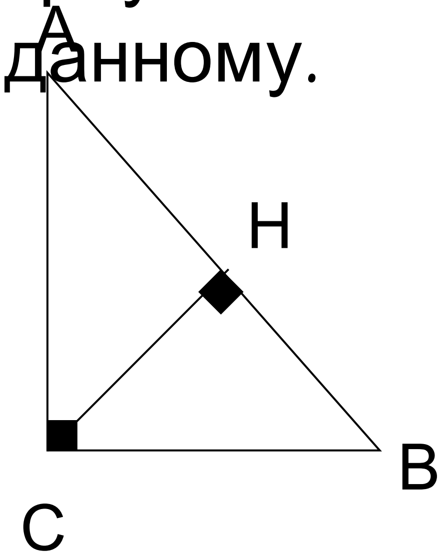
Но $AB = 2A_1B_1$, поэтому $AO = 2A_1O$ и $BO = 2B_1O$. Значит точка O- пересечение медиан AA_1 и BB_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Аналогично доказывается, что точка O – пересечение медиан BB_1 и CC_1 делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

Значит точка O – пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 делит их в отношении $2:1$, считая от вершины.

Высота в треугольнике

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.



Дано: $\triangle$ ABC – прямоугольный

CH – высота

Доказать: $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ACH

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ CBH

$\triangle$ ACH $\sim$ $\triangle$ CBH

Высота в треугольнике

Доказательство:

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ACH (по двум углам: A - как общий и прямым),

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ BCH (по двум углам: B - общий и прямыми),

Рассмотрим $\triangle$ ACH и $\triangle$ BCH – прямоугольные

1) угол AHC = углу CHB – прямые углы

2) угол A = углу BCH

Значит $\triangle$ ACH $\sim$ $\triangle$ BCH.

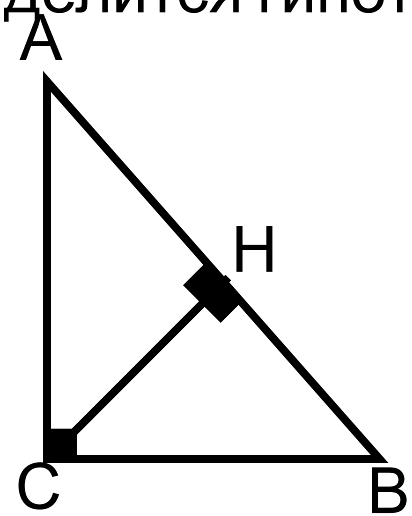
Среднее пропорциональное

Отрезок XY называется средним пропорциональным (или средним геометрическим) между отрезками АВ и СД, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$$

Следствие 1

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



Дано: $\triangle$ ABC – прямоугольный

CH – высота

Доказать: $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Доказательство:

$\triangle$ AHC $\sim$ $\triangle$ CBH, поэтому $\dfrac{AH}{CH} = \dfrac{CH}{HB}$

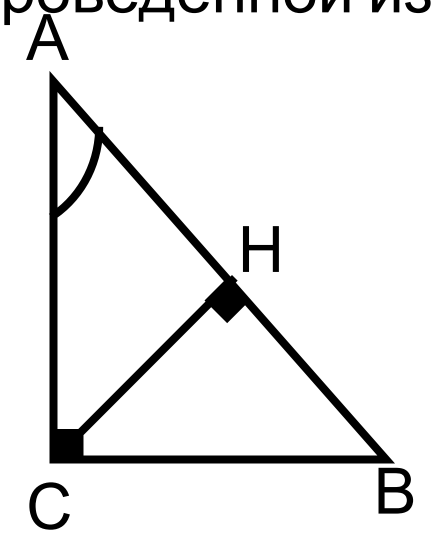
Следовательно

CH^2=AH·HB

Значит $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Следствие 2

Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.



Дано: $\triangle$ ABC – прямоугольный

CH – высота

Доказать: $AC=\sqrt{AB\cdot AH}$

Доказательство:

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ACH (по двум углам), поэтому

$$\frac{AB}{CA}=\frac{AC}{AH}$$

Значит $AC=\sqrt{AB\cdot AH}$

Соотношение между сторонами и углам

прямоугольного треугольника

Синус

Косинус

Тангенс

Котангенс

Значение синуса, косинуса

и тангенса для углов 30, 45

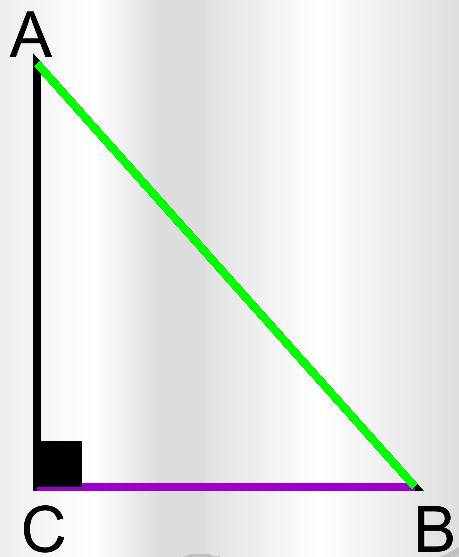
и 60 градусов

Основные тригонометрич

тождества.

Синус

Синус острого угла прямоугольного треугольника – это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

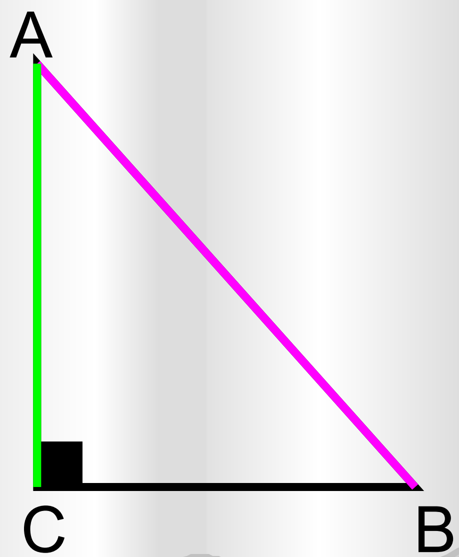


$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

Косинус

Косинус острого угла прямоугольного треугольника –

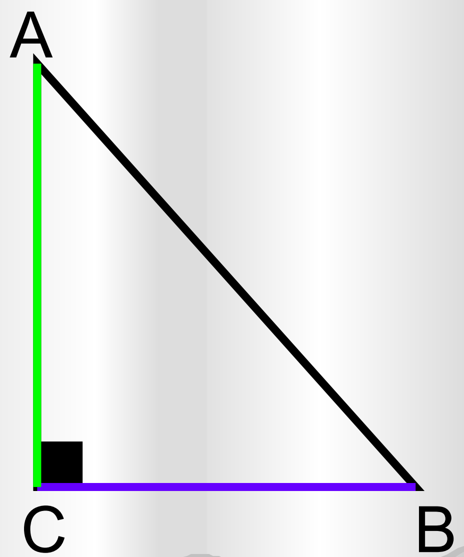
это отношение прилежащего катета к гипотенузе.



$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

Тангенс

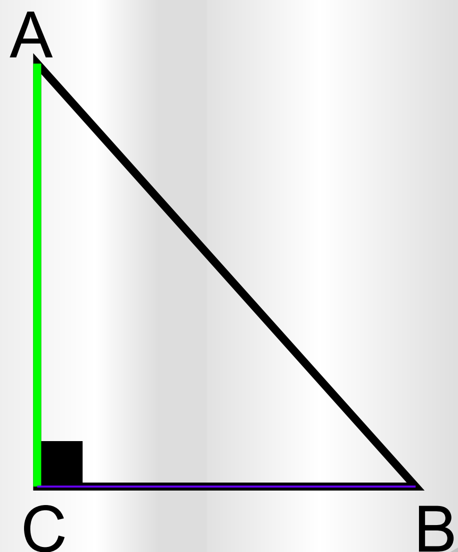
Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – это отношение противолежащего катета к прилежащему катету.



$$tgA = \frac{BC}{AC} = \frac{\sin A}{\cos A}$$

Котангенс

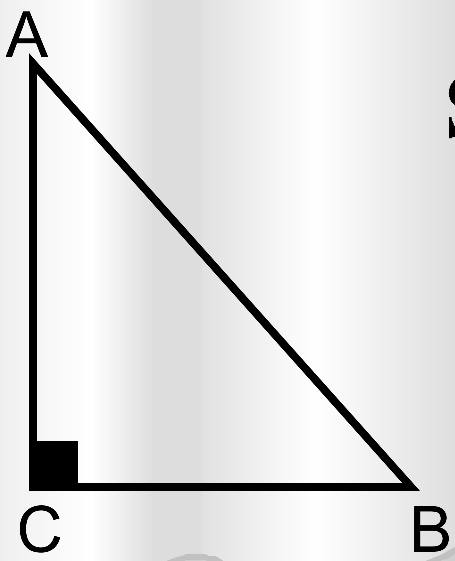
Тангенс острого угла прямоугольного треугольника – это отношение прилежащего катета к противолежащему катету.



$$ctgA = \frac{AC}{BC}$$

Основные тригонометрические тождества.

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$



$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$$

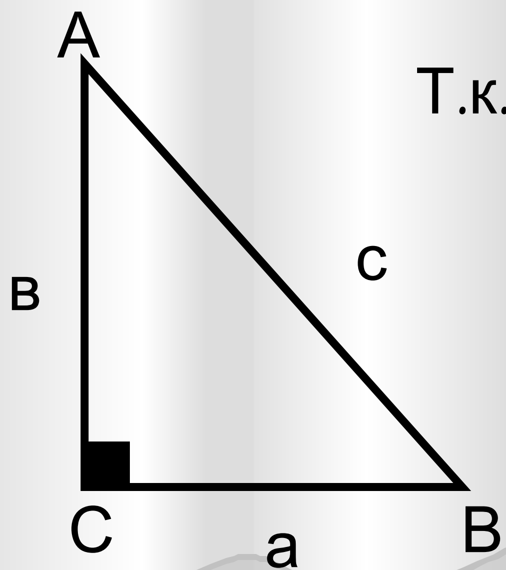
$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$$

Значение синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов.

ABC – прям.

$\angle A = 30^0$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{2}c \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{1}{2}$$



Т.к.

$$\frac{a}{c} = \sin A$$

$$\angle A = 30^0$$

$$\Rightarrow \sin 30^0 = \frac{1}{2}$$

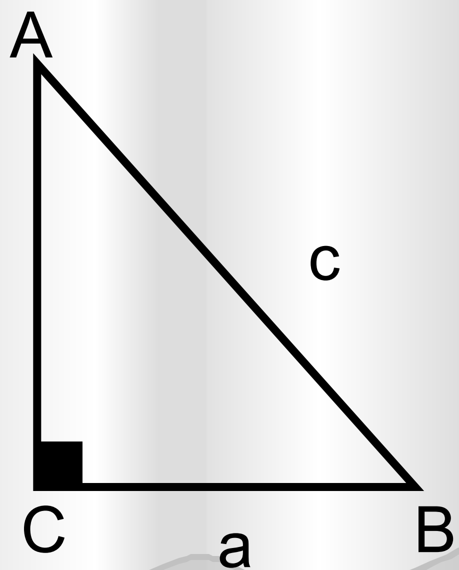
Значение синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов.

ABC – прям.

$\angle A = 30^0$

$\sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$a = \frac{1}{2} c$



По теореме Пифагора:

$в = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$\cos A = \frac{в}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

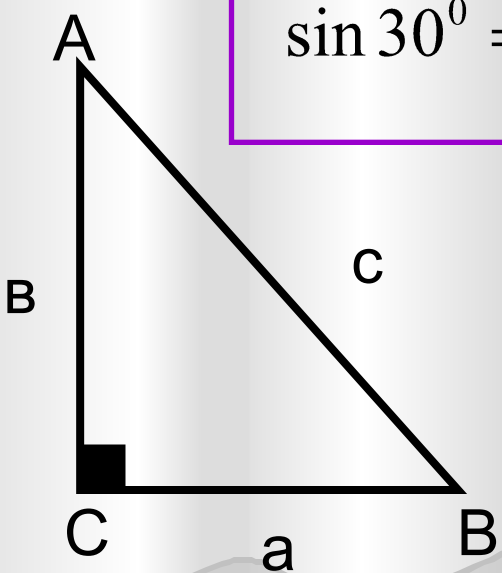
Значение синуса, косинуса и тангенса для углов *30, 45* и *60* градусов.

$$\sin 30^0 = \frac{a}{c} = \cos 60^0$$

$$\sin 30^0 = \frac{1}{2} = \cos 60^0$$

$$\cos 30^0 = \frac{в}{c} = \sin 60^0$$

$$\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^0$$

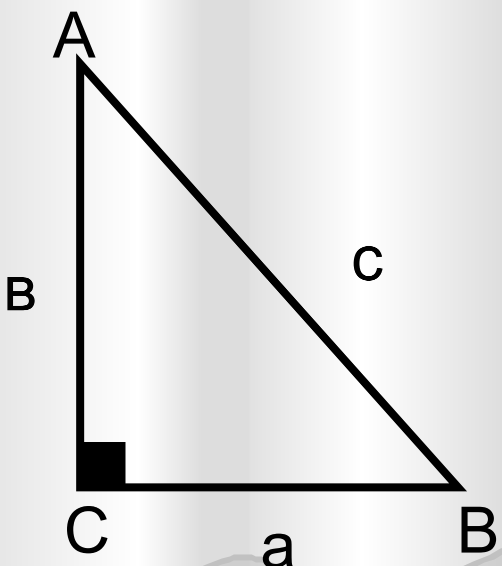


$$\sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45^0$$

$$tg30^0 = \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = ctg60^0$$

$$tg60^0 = \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3} = ctg30^0$$

Значение синуса, косинуса и тангенса для углов 30, 45 и 60 градусов.



а	30^0	45^0	60^0
$\sin a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$tg\ a$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$ctg\ a$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$