

# ЗАДАНИЯ С РАЗВЕРНУТЫМ ОТВЕТОМ ПОВЫШЕННОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ С5.

Подготовка к ЕГЭ.

**Задача 1.** Найти все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 1$  имеет ровно 8 решений.

### Решение.

1. Преобразуем уравнение

$$\cos \sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x^2 = (2\pi n)^2 \\ n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{a^2 - (2\pi n)^2} \\ n = 0, 1, 2, k \end{cases}$$

2. Если  $a^2 - (2\pi n)^2 > 0$ , то уравнение имеет два корня, отличающихся знаком.

Если  $a^2 - (2\pi n)^2 = 0$ , то имеется ровно один корень.

Если  $a^2 - (2\pi n)^2 < 0$ , то корней нет. Поэтому для выполнения условия задачи, необходимо и достаточно, чтобы

положительно при  $n=0, 1, 2, 3$  и отрицательно при  $n=4, 5, k$

3. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} a^2 - (2\pi \cdot 3)^2 > 0, \\ a^2 - (2\pi \cdot 4)^2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a| > 2\pi \cdot 3 \\ |a| < 2\pi \cdot 4 \end{cases}$$

**Ответ:**  $-8\pi < a < -6\pi, \quad 6\pi < a < 8\pi.$

## Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат  $(a; x)$ , если мы неизвестное выражали через параметр, или  $(x; a)$ , если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

**Задача 2.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых функция  $f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$  имеет более двух точек экстремума.

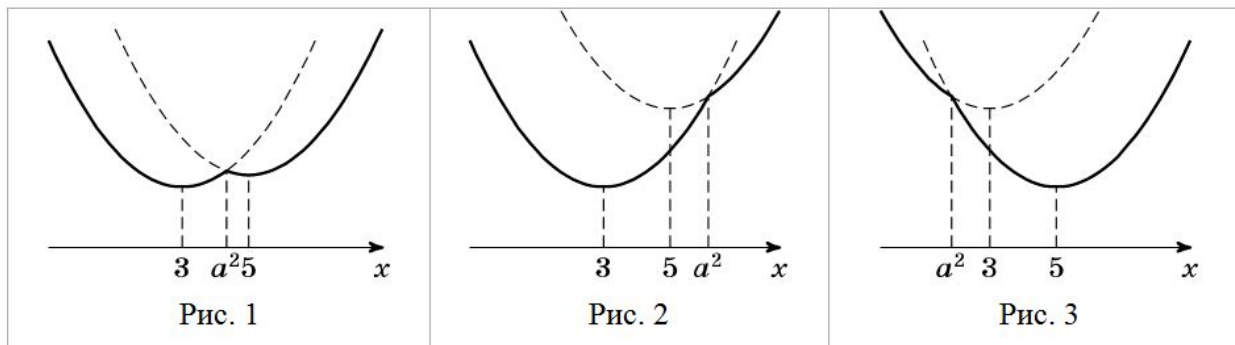
**Решение.**

1. Функция  $f$  имеет вид:

а) при  $x \geq a^2 : f(x) = x^2 - 10x + 2a^2$ , поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x=5$ ;

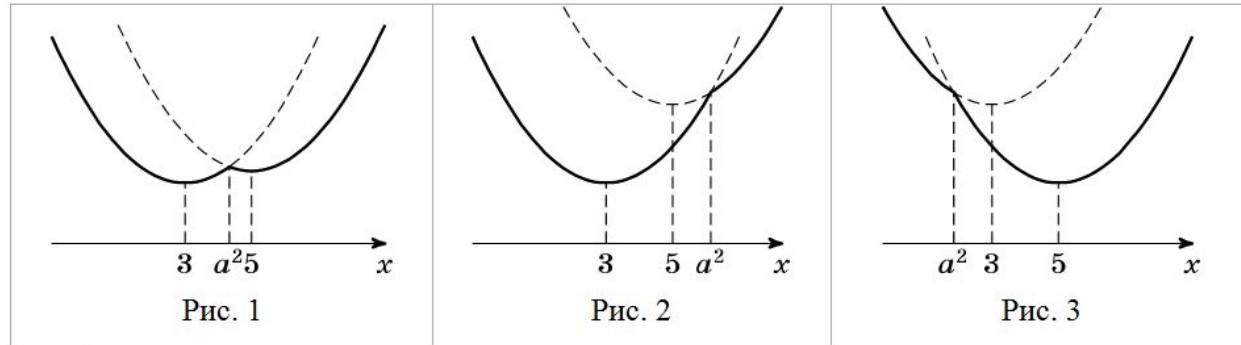
б) при  $x \leq a^2 : f(x) = x^2 - 6x - 2a^2$ , поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии  $x=3$ .

Все возможные виды графика функции  $f(x)$  показаны на рисунках:



**Задача 2.** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых функция

$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 8x$  имеет более двух точек экстремума.



$$-\sqrt{5} <$$

2) График обеих квадратичных функций проходят через точку  $(a^2; f(a^2))$ .

3) Функция  $y = f(x)$  имеет более двух точек экстремума, а именно – три, в единственном случае (рис. 1):  $3 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \sqrt{3} < |a| < \sqrt{5}$ .

$$-\sqrt{5} < a < -\sqrt{3}; \quad \sqrt{3} < a < \sqrt{5}.$$

**Ответ:**

**Задача 3.** Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{имеет единственное решение.}$$

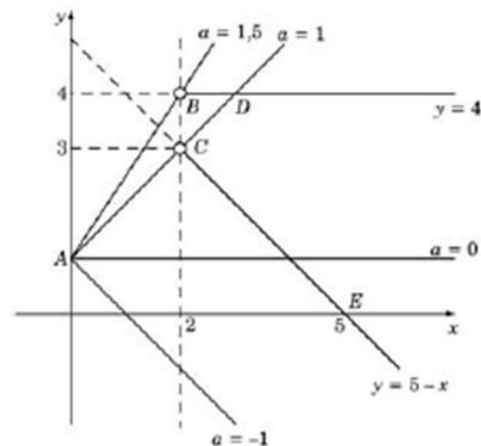
**Решение.** Преобразуем исходную систему

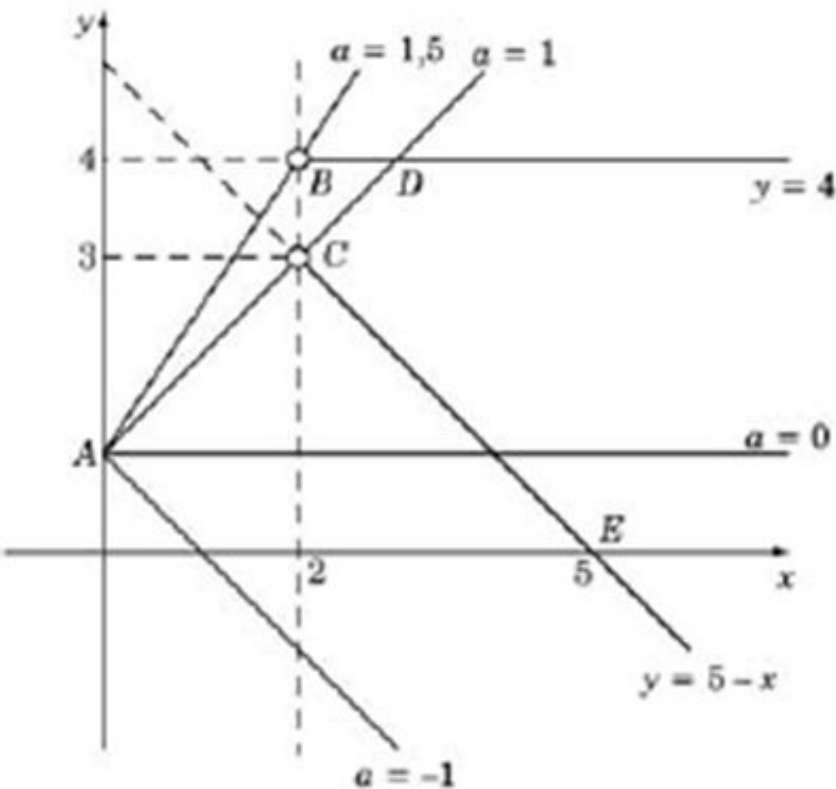
$$\begin{cases} (y-4)x + y^2 - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)x + (y-4)(y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)(x+y-5) = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

Уравнение  $(y-4)(x+y-5)=0$  задает пару пересекающихся прямых  $y=4$  и  $y=5-x$ .

Система 
$$\begin{cases} x > 2, \\ (y-4)(x+y-5) = 0 \end{cases}$$

задает части этих прямых, расположенные правее прямой  $x=2$ , т.е. лучи  $BD$  и  $CE$  (без точек  $B$  и  $C$ ), см. рис.





Уравнение  $y = ax + 1$  задает прямую  $t$  с угловым коэффициентом  $a$ , проходящую через точку  $A(0; 1)$ . Следует найти все значения  $a$ , при каждом из которых прямая  $t$  имеет единственную общую точку с объединением лучей  $BD$  и  $CE$ .

а) Прямая  $AB$  задается уравнением  $y = 1,5x + 1$ . Поэтому при  $a \geq 1,5$  прямая  $t$  не пересечет ни луч  $BD$ , ни луч  $CE$ .

б) Прямая  $AC$  задается уравнением  $y = x + 1$ . Поэтому при  $1 < a < 1,5$  прямая  $t$  пересечет луч  $BD$ , но не пересечет луч  $CE$ .

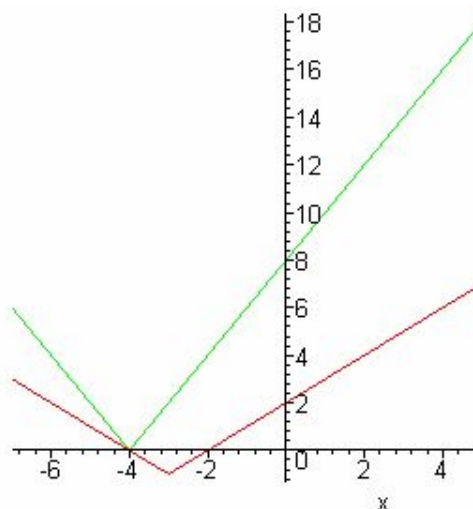
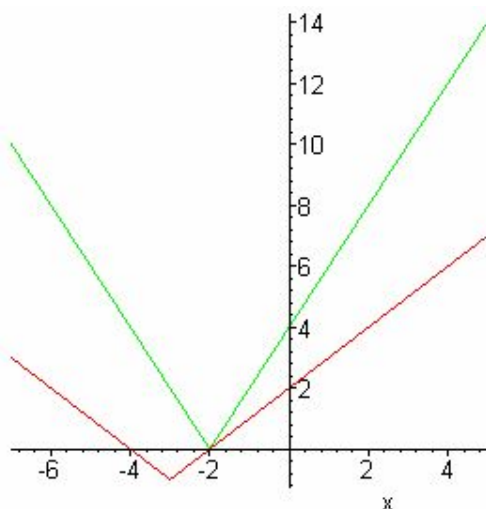
в) При  $0 < a < 1$  прямая  $t$  пересечет и луч  $BD$ , и луч  $CE$ .

г) При  $-1 < a \leq 0$  прямая  $t$  пересечет только луч  $CE$ , а при  $a \leq -1$  она не пересечет ни луч  $BD$ , и ни луч  $CE$ .

Ответ.  $-1 < a \leq 0$ ,  $1 \leq a < 1,5$ .

**Задача 4.** Найдите все значения  $a$ , такие, что уравнение  $|x+3| - 1 = |2x - a|$  имеет единственное решение.

Решение. Решим с помощью графиков.



Для выполнения условия задачи вершина графика правой части уравнения должна находиться в точке  $x = -2$  или  $x = -4$ .

$$\text{Т.е. } \begin{cases} -4 - a = 0, \\ -8 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8, \\ a = -4. \end{cases}$$

Ответ: - 8 и - 4.

Задача 5. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых функция  $f(x) = x^2 + 4x + |x^2 - 1,5x - 1|$  принимает только неотрицательные значения.

Решение.  $x^2 - 1,5x - 1 = 0$ ,  $x = 2$ ;  $-0,5$ .

$$1) \ x \in (-\infty; -0,5) \cup (2; \infty) \quad f(x) = 2x^2 + 2,5x - 1 - a$$

Т.к. ветви параболы  $f(x)$  направлены вверх, вершина  $y = -5/8$  для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) \geq 0 \rightarrow \frac{25}{32} - \frac{25}{16} - 1 - a \geq 0 \rightarrow -\frac{57}{32} - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{57}{32}.$$

$$2) \ x \in \left(-\frac{1}{2}; 2\right) \quad f(x) = \frac{11}{2}x + 1 - a$$

График функции  $f(x)$  – возрастающая прямая, таким образом, для выполнения условия задачи необходимо и достаточно, чтобы  $f(-0,5) \geq 0$

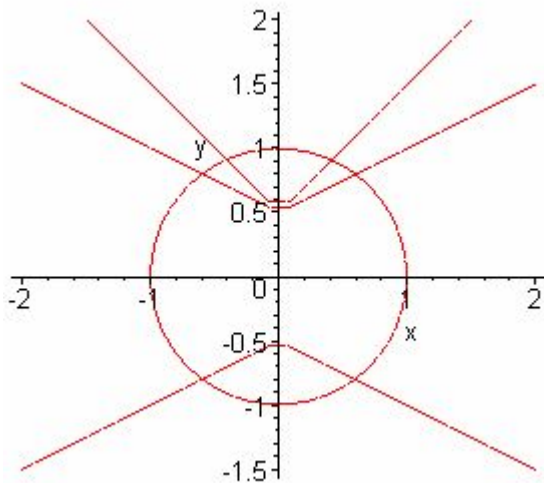
$$-\frac{11}{4} + 1 - a \geq 0 \rightarrow a \leq -\frac{7}{4}.$$

$$\text{Ответ: } a \leq -\frac{57}{32}.$$

**Задача 6.** Найдите все значения  $p$ , при каждом из которых для любого  $q$  система  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$  имеет решения.

**Решение.**

График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с центром в начале координат. График функции, заданной вторым уравнением должен пересекать эту окружность при любом  $q$ , т.е. при любом угле наклона прямых этой ломаной.



Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси  $y$  не более чем на единицу вниз или вверх .

Ответ  $-1 \leq p \leq 1.$   
:

## Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите все положительные значения  $a$ , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 9)^2 + (y - 5)^2 = 9, \\ (x + 3)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное значение

2. При каких  $a$  уравнение  $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$  имеет ровно 8 корней?

Ответ:  $a \in (-8\pi; -6\pi) \cup (6\pi; 8\pi)$ .

3. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$  имеет хотя бы один корень.

Ответ:  $a \in (-\infty; -12] \cup [8; \infty)$ .

4. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 3|$  имеет два корня.

## Для успешного решения задач типа С5 необходимо:

- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы

# ИСТОЧНИКИ:

1. <http://alexlarin.narod.ru>
2. <http://www.akipkro.ru/>
3. <http://4ege.ru/matematika/>
4. <http://www.ctege.info/content/>
5. <http://seklib.ru/>
6. <http://mathege.info/category/zadaniya-ege/c5-zadanie-ege/>
7. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 1)
8. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 2)
9. ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 3)
11. Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ., М.: МЦНМО, 2011 - 36 с.