



5



7



3



Нахождение площади сегментов

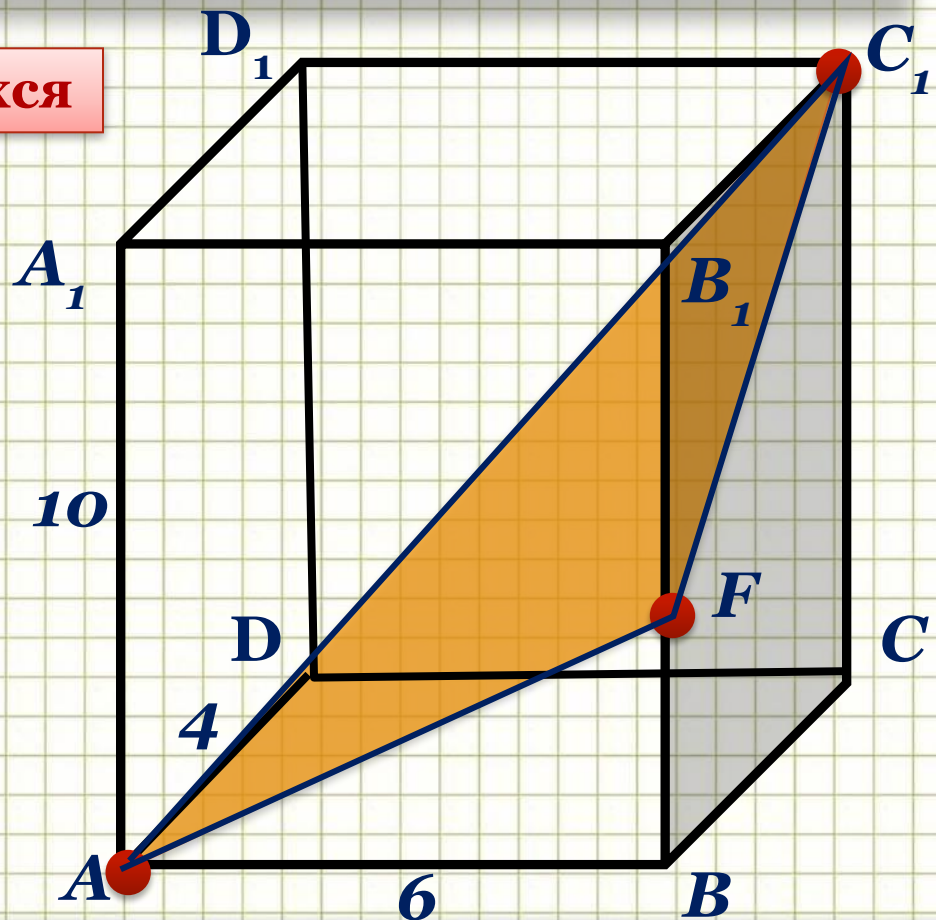


Учитель математики МБОУ
СОШ № 25 г. Крымска Е.В. Малая

Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$. Точка F принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от $(\cdot)$ B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , F и C_1 .

Стандартная ошибка учащихся

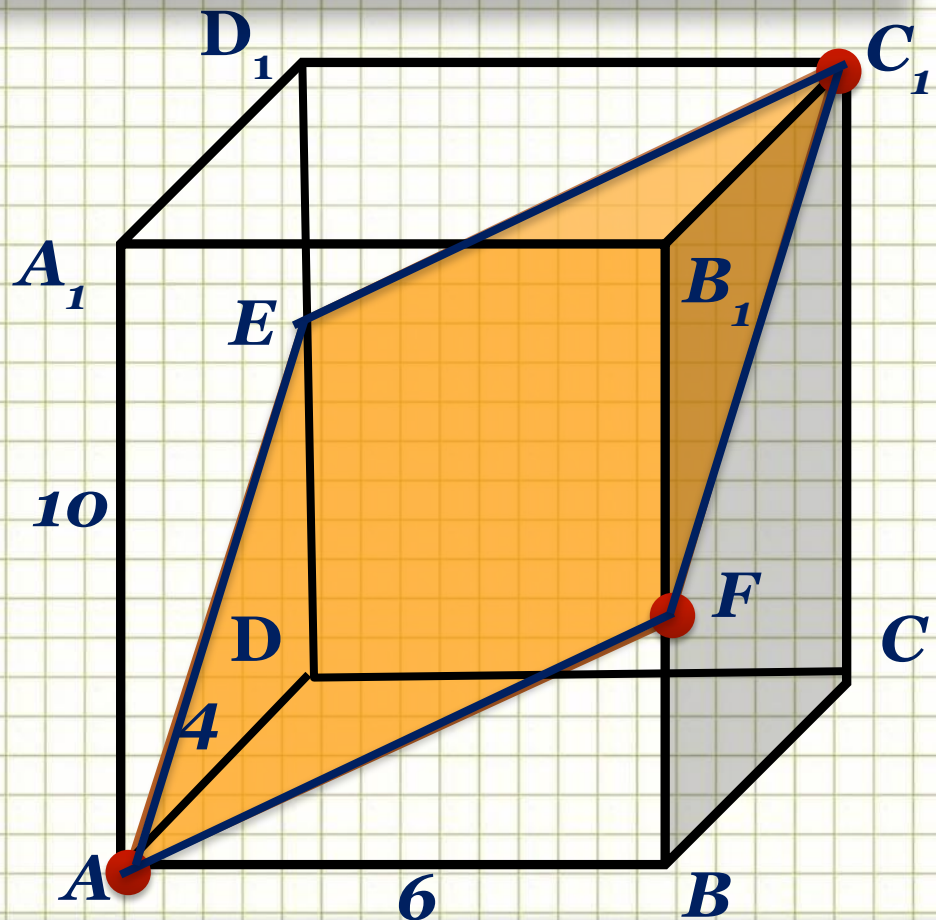


Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$. Точка F принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от $(\cdot)$ B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , F и C_1 .

Отрезок $C_1E \parallel AF$,
 $AE \parallel FC_1$

Искомое сечение
 AFC_1E -
параллелограмм





5



7



3



Из $\triangle ABF$:

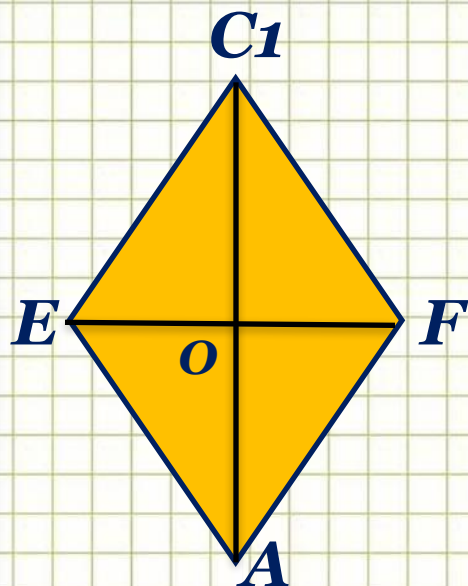
$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = 2\sqrt{13}$$

Из $\triangle C_1B_1F$:

$$C_1F = \sqrt{C_1B_1^2 + B_1F^2} = 2\sqrt{13}$$

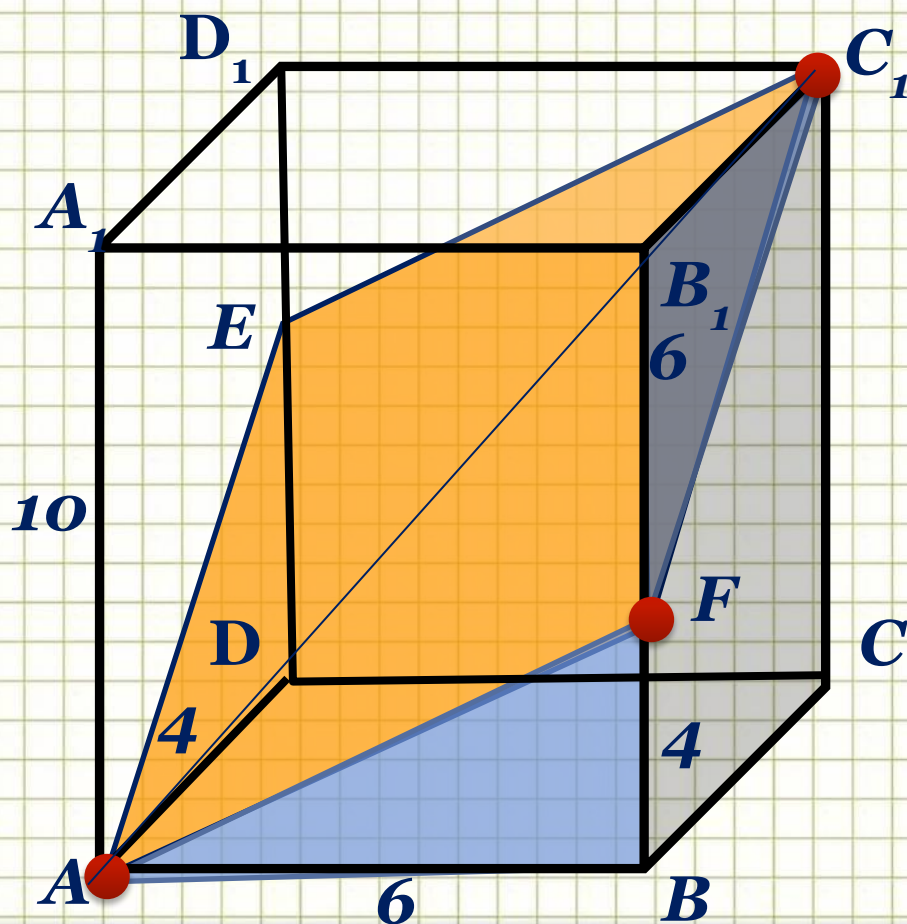
Значит, сечение AFC_1E – ромб с диагональю

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1^2} = 2\sqrt{38}$$



$$EF = \sqrt{AF^2 - \frac{AC_1^2}{4}} = 2\sqrt{14}$$

$$S = \frac{1}{2} AC_1 \cdot EF = 4\sqrt{133}$$

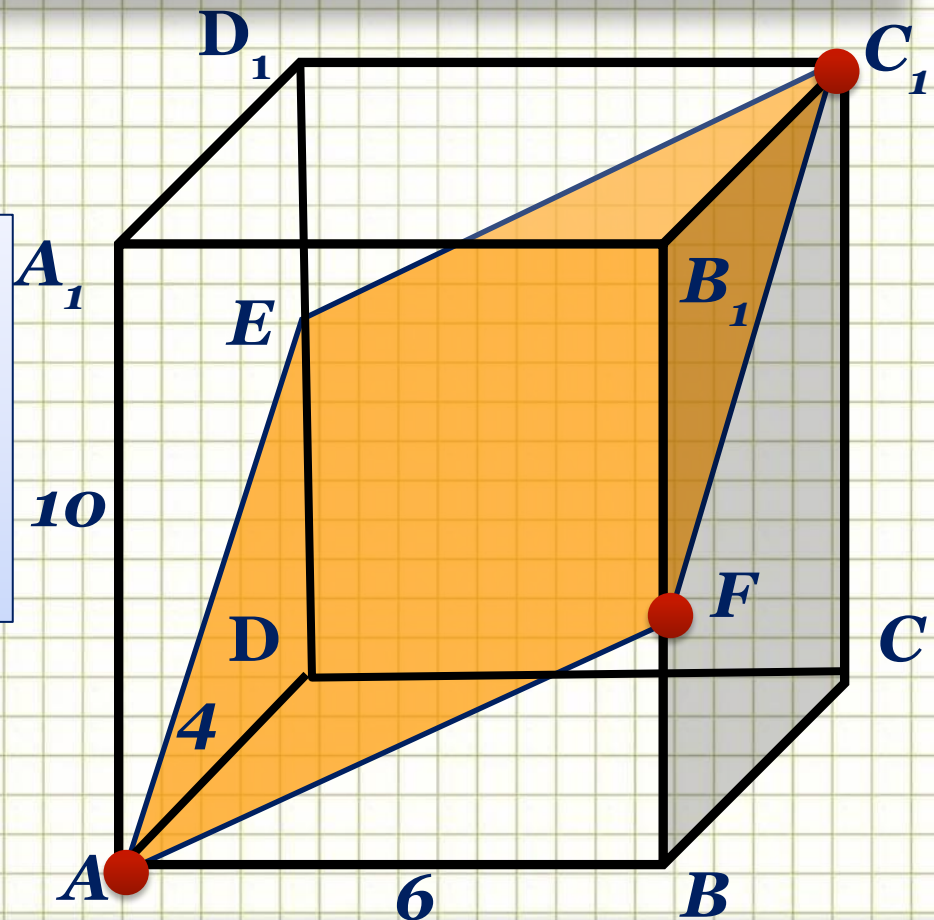


Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$. Точка F принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от $(\cdot)$ B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , F и C_1 .

2

Площадь ортогональной проекции многоугольника равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостями





5



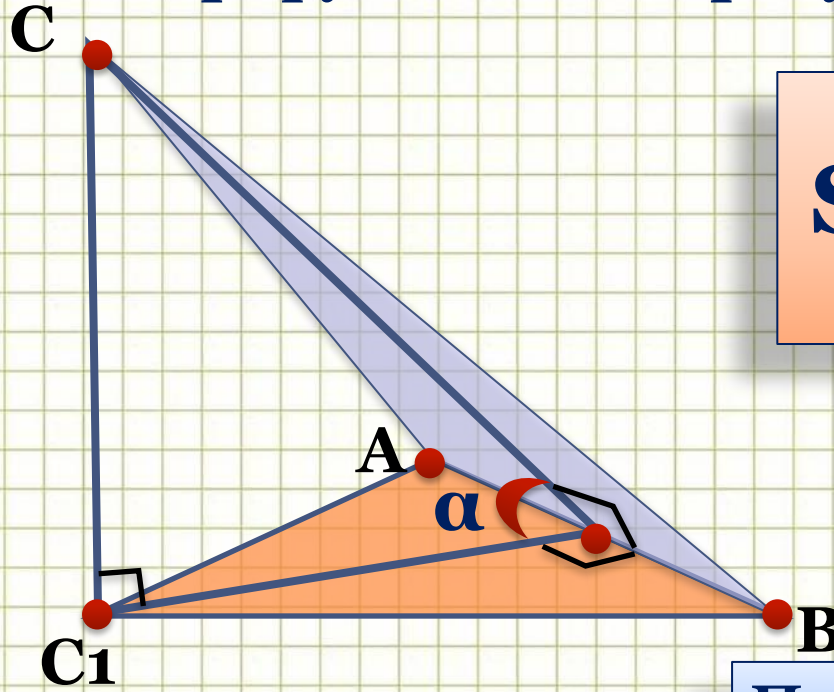
7



3



Нахождение площади многоугольника через площадь его ортогональной проекции легко иллюстрируется таким рисунком:



$$S_{ABC} = \frac{S_{A_1B_1C_1}}{\cos \alpha}$$

План решения такой:

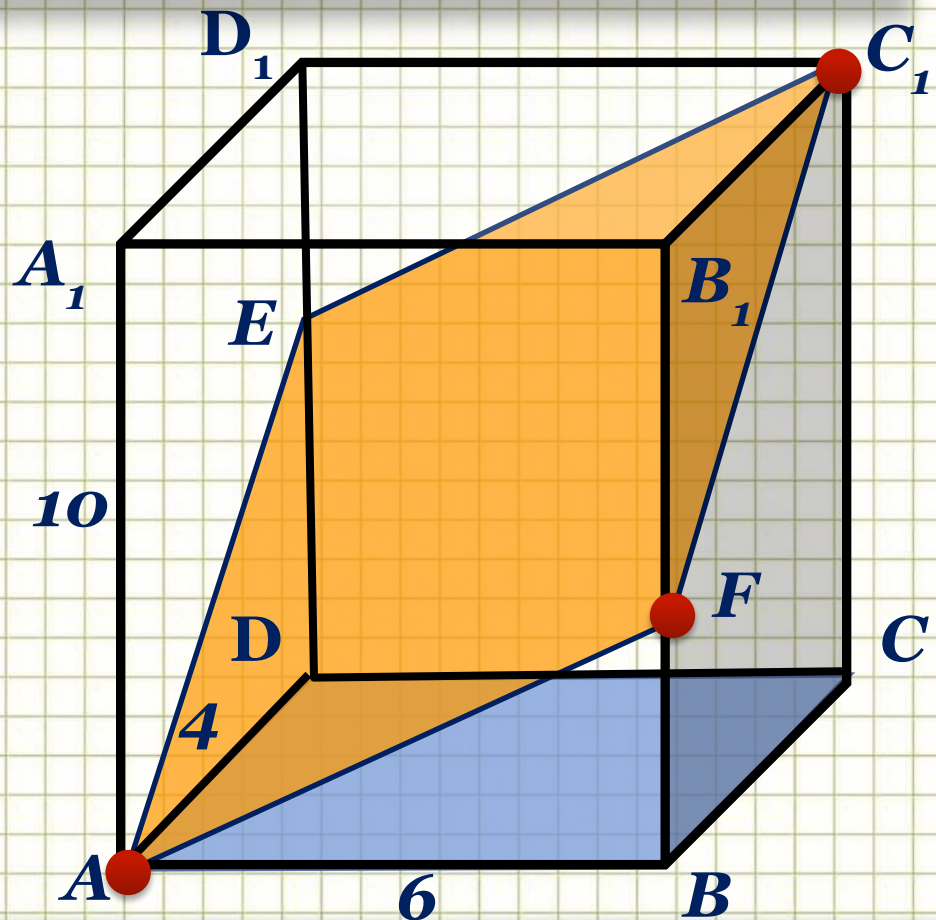
- 1) Строим сечение.
- 2) Находим его ортогональную проекцию на плоскость основания.
- 3) Находим площадь ортогональной проекции.
- 4) Находим площадь сечения.

Задача №1:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 6$, $AD = 4$, $AA_1 = 10$. Точка F принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2 : 3$, считая от $(\cdot)$ B . Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , F и C_1 .

$$S_{AFC_1E} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \alpha}$$

Угол α между
плоскостями равен
углу между
прямыми,
перпендикулярным
и к этим плоскостям



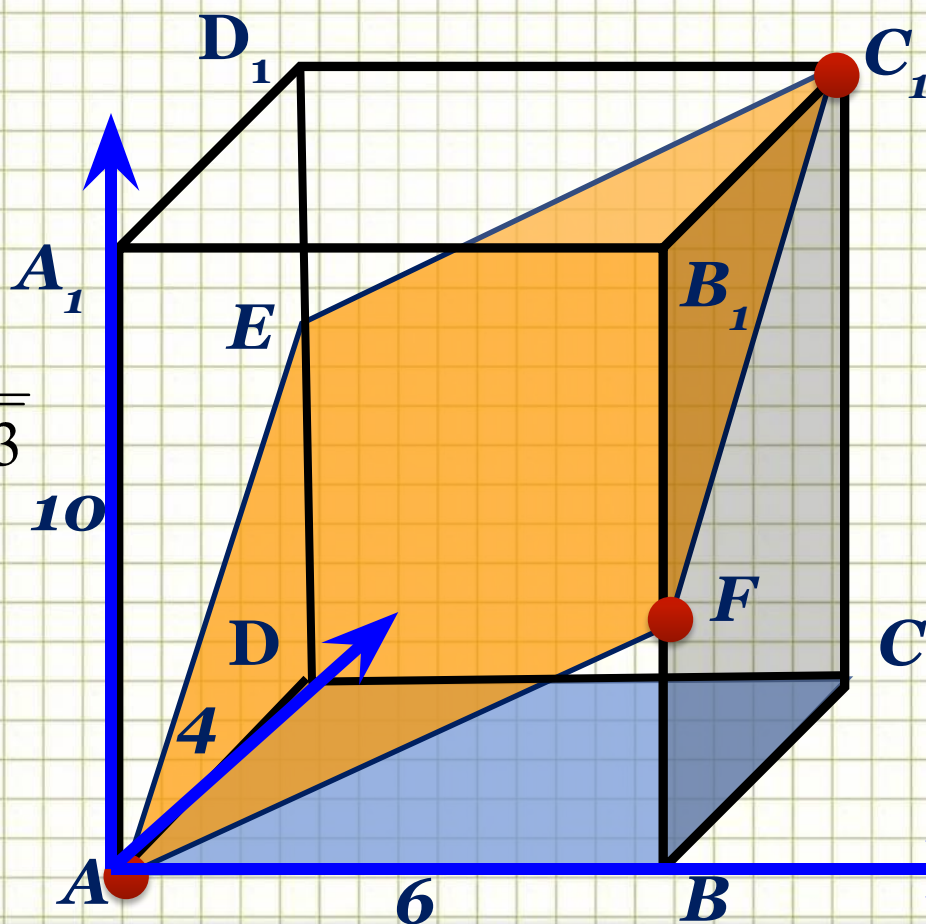
Угол α между плоскостями равен **углу между ненулевыми векторами, перпендикулярными к этим плоскостям, т.е. между векторами нормалей**

Уравнение плоскости $AFC_1E : 4x + 9y - 6z = 0$
 вектор нормали $\vec{n}(4;9;-6) \quad |\vec{n}| = \sqrt{16 + 81 + 36} = \sqrt{133}$

вектор нормали $\vec{DD_1}(0;0;10)$
 к плоскости $ABCD \quad |\vec{DD_1}| = 10$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{DD_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{DD_1}|} = \frac{6}{\sqrt{133}}$$

$$S_{AFC_1E} = \frac{S_{ABCD}}{\cos \alpha} = 4\sqrt{133}$$

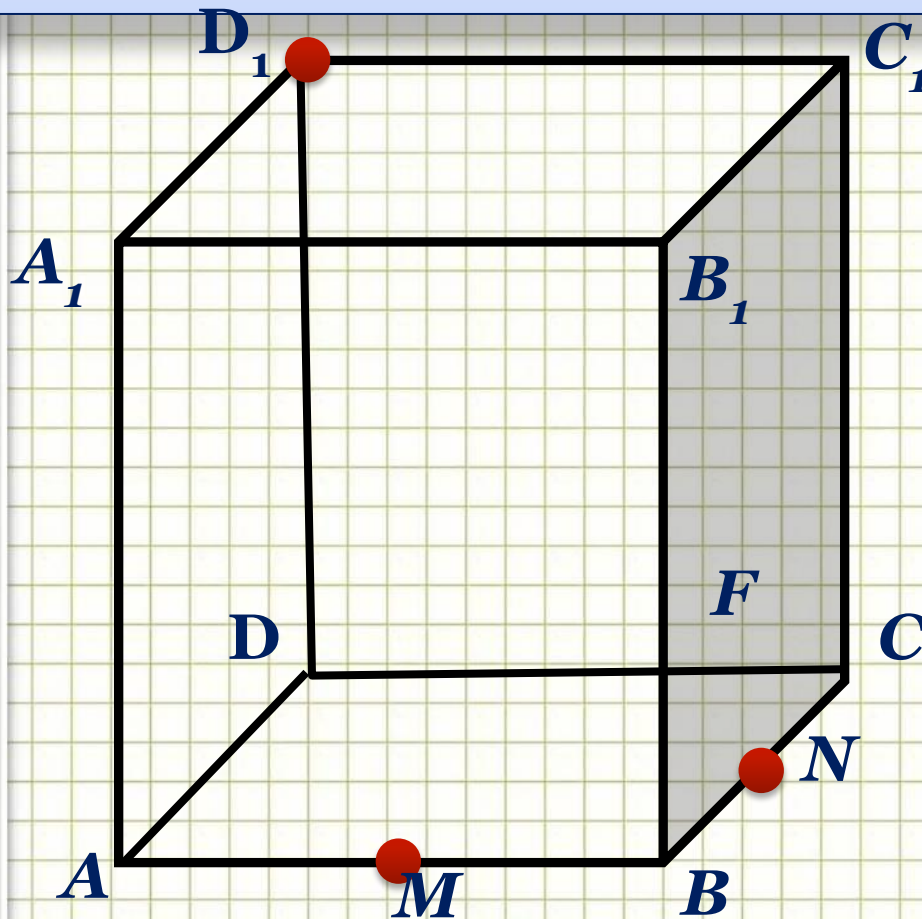


Задача №2:

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра $AB = 16$, $BC = 12$, $AA_1 = 20$.

Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через вершину D_1 и середины ребер AB и BC .

Найдите площадь полученного сечения.



Построение:

1. $(\cdot) M \leftrightarrow (\cdot) N$.

2. $MN \cap DC = (\cdot) Y$

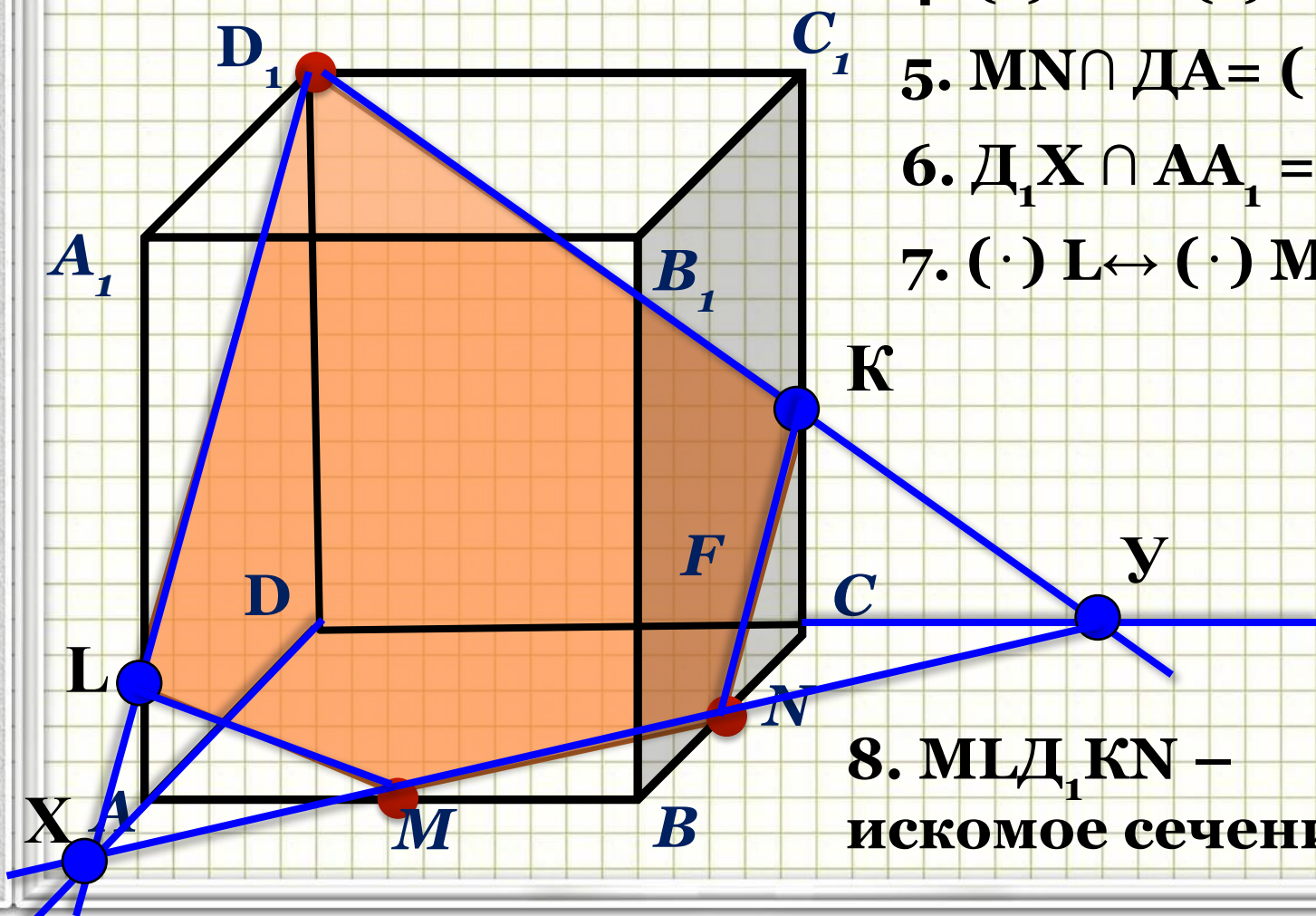
3. $D_1Y \cap CC_1 = (\cdot) K$

4. $(\cdot) N \leftrightarrow (\cdot) K$,

5. $MN \cap DA = (\cdot) X$

6. $D_1X \cap AA_1 = (\cdot) L$

7. $(\cdot) L \leftrightarrow (\cdot) M$,



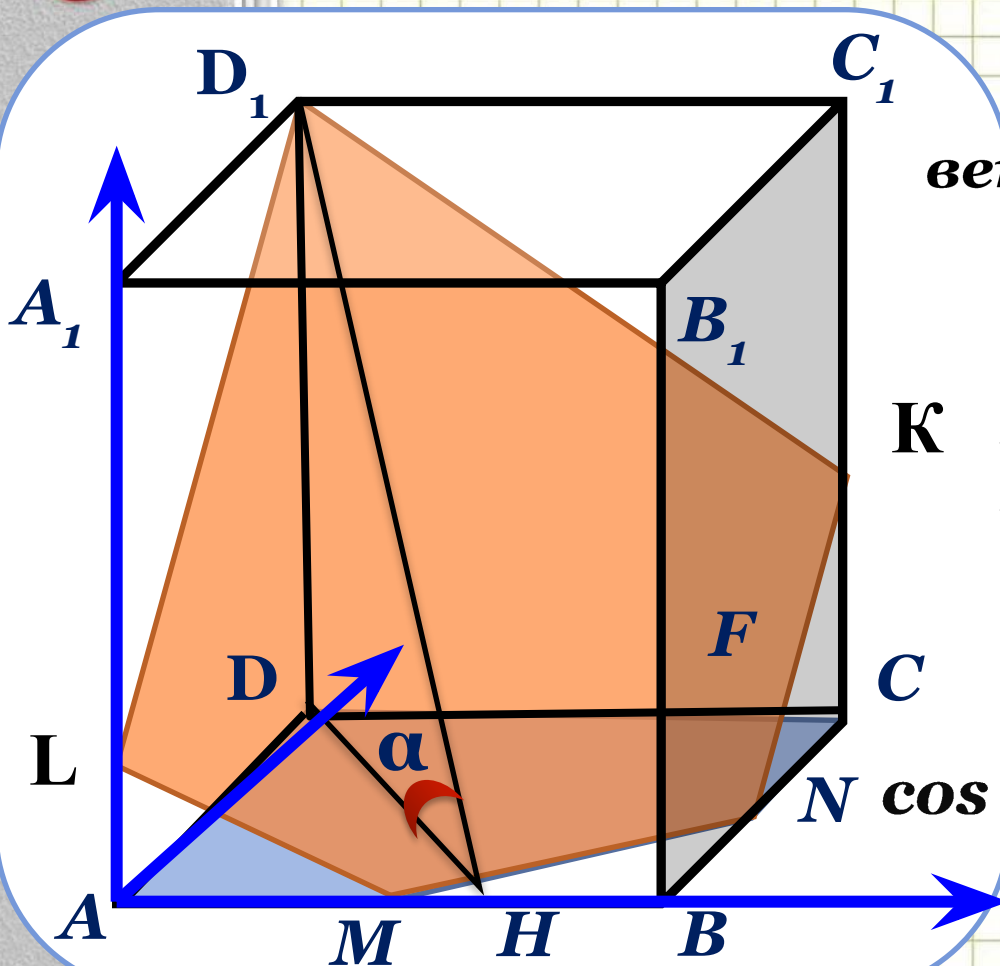
8. MLD_1KN –
искaемое сечение

Вычисление угла:

5

Найдем косинус угла между плоскостями:
Составим уравнение плоскости сечения:

$$15x - 20y + 18z - 120 = 0$$



вектор нормали $\vec{n}(15; -20; 18)$

$$|\vec{n}| = \sqrt{949}$$

К вектор нормали $\vec{DD_1}(0; 0; 20)$
к плоскости ABCD

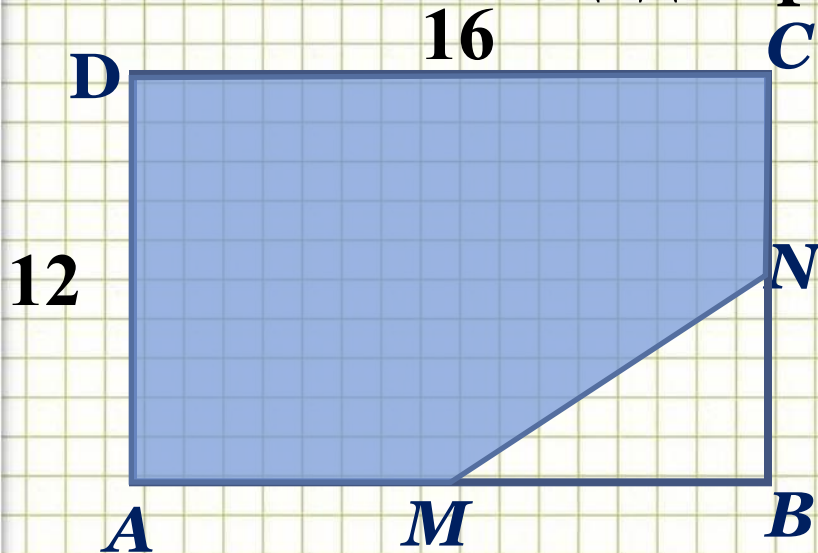
$$|\vec{DD_1}| = 20$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{DD_1}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{DD_1}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{18}{\sqrt{949}}$$

Вычисление площади:

Вычислим площадь проекции:



$$S_{\text{сеч}} = S_{ABCD} - S_{\triangle MBN}$$

$$S_{\text{сеч}} = 168$$

$$\cos \alpha = \frac{18}{\sqrt{949}}$$

$$S_{\text{сечения}} = \frac{S_{\text{проекция}}}{\cos \alpha}$$

$$S_{\text{сеч}} = \frac{28\sqrt{949}}{3}$$