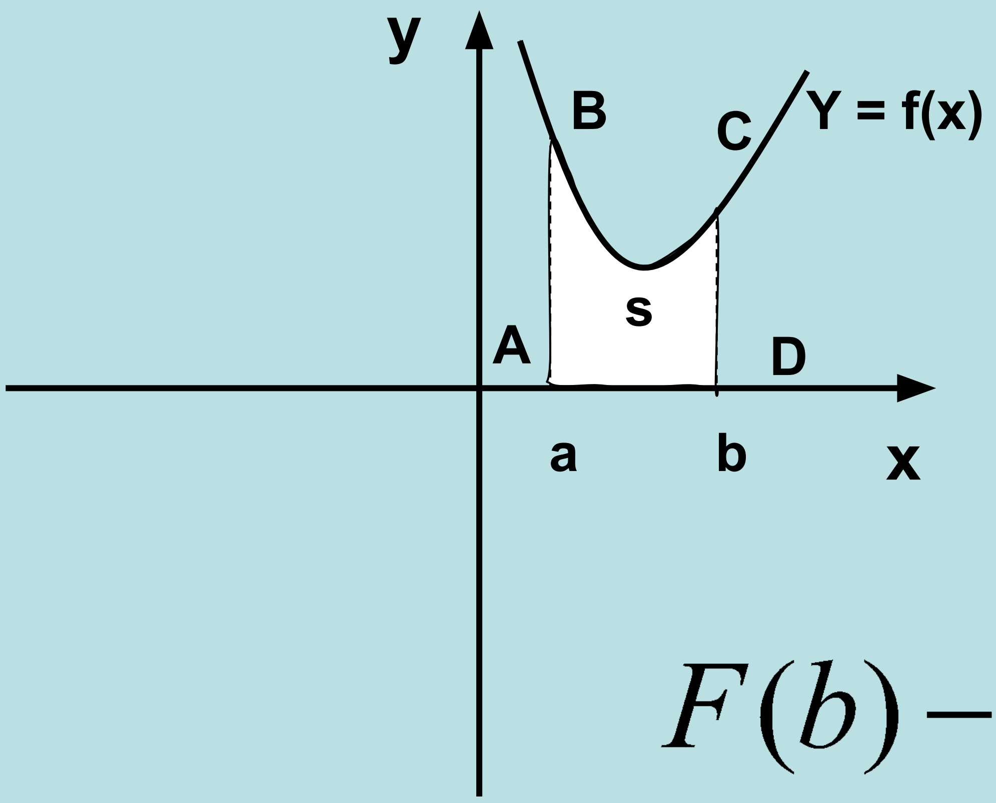
площадь криволинейной трапеции

Площадь криволинейной трапеции

ABCD –криволинейная трапеция

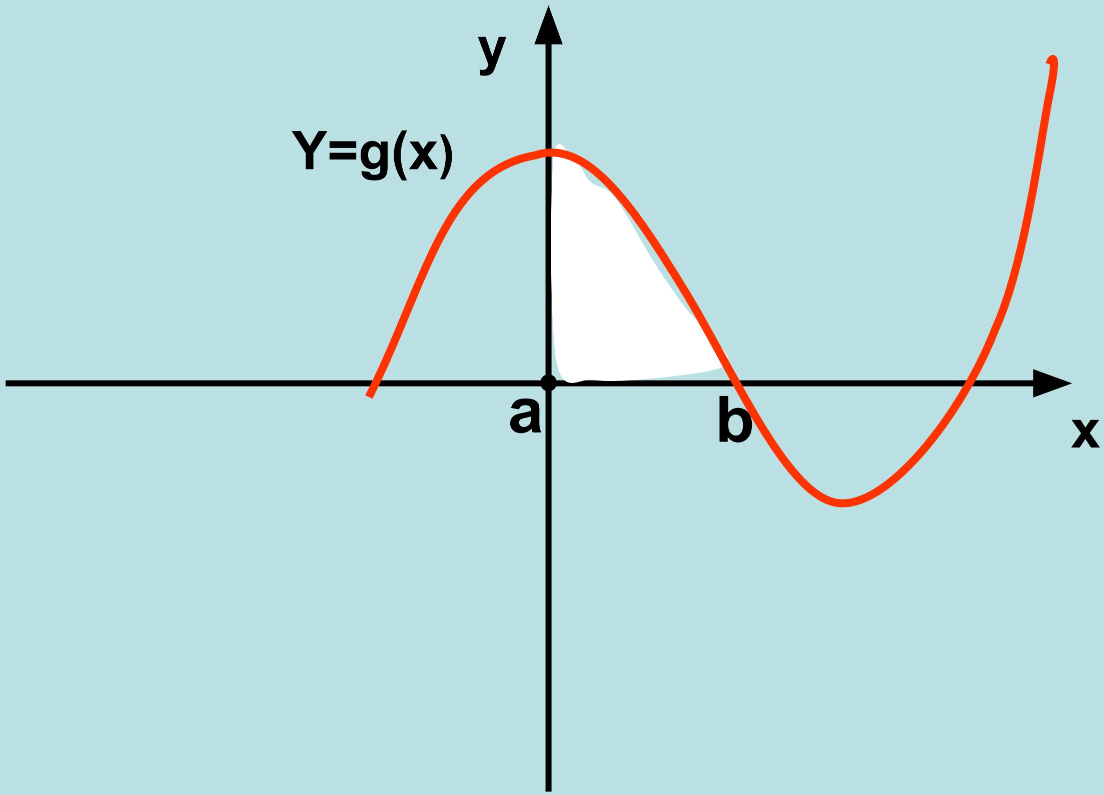


S = F(b) – F(a)

$F^{/}(x) = f(x)$

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

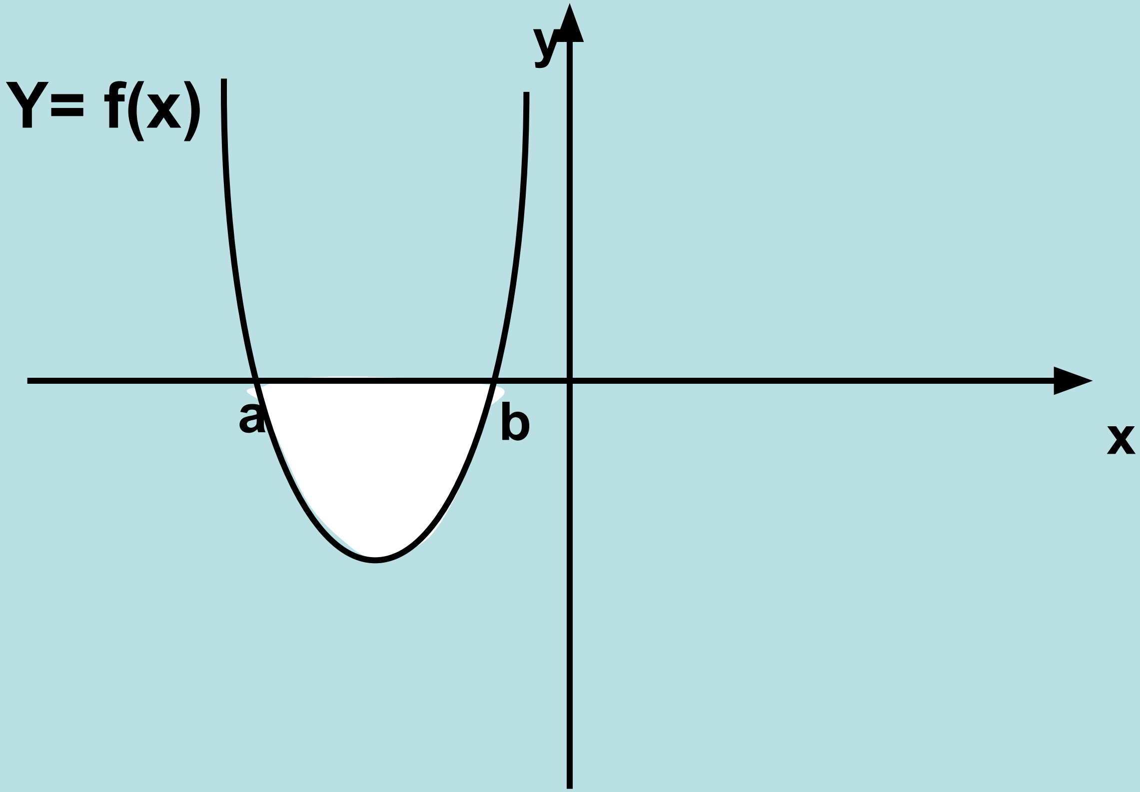
Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



a) S = F(b) – F(a)

b) $S = \int_a^b f(x)dx$

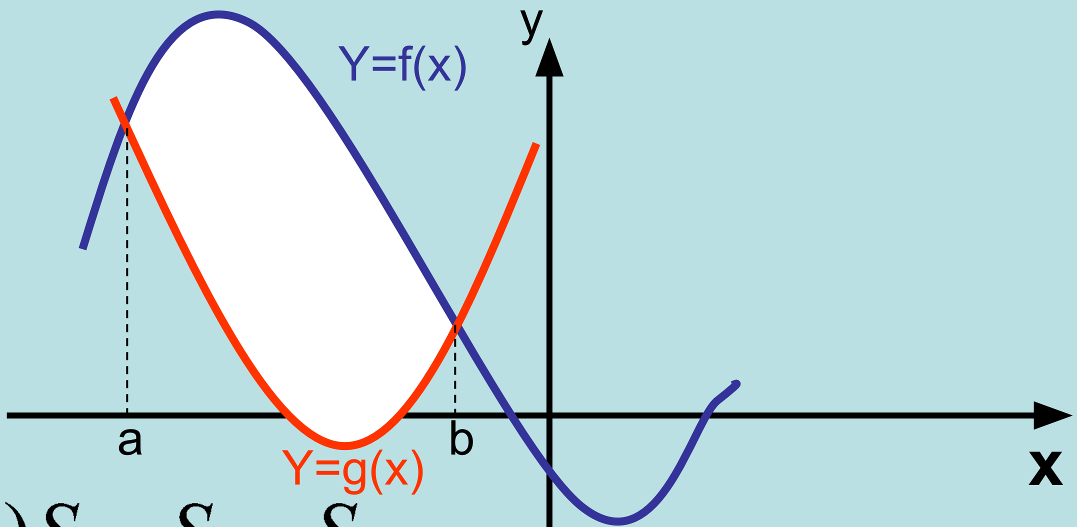
Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



a) S = - (F(b) –F(a)

$$b)S = \int_a^b (-f(x))dx$$

Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



$$a)\,S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = F(b) - F(a)$$

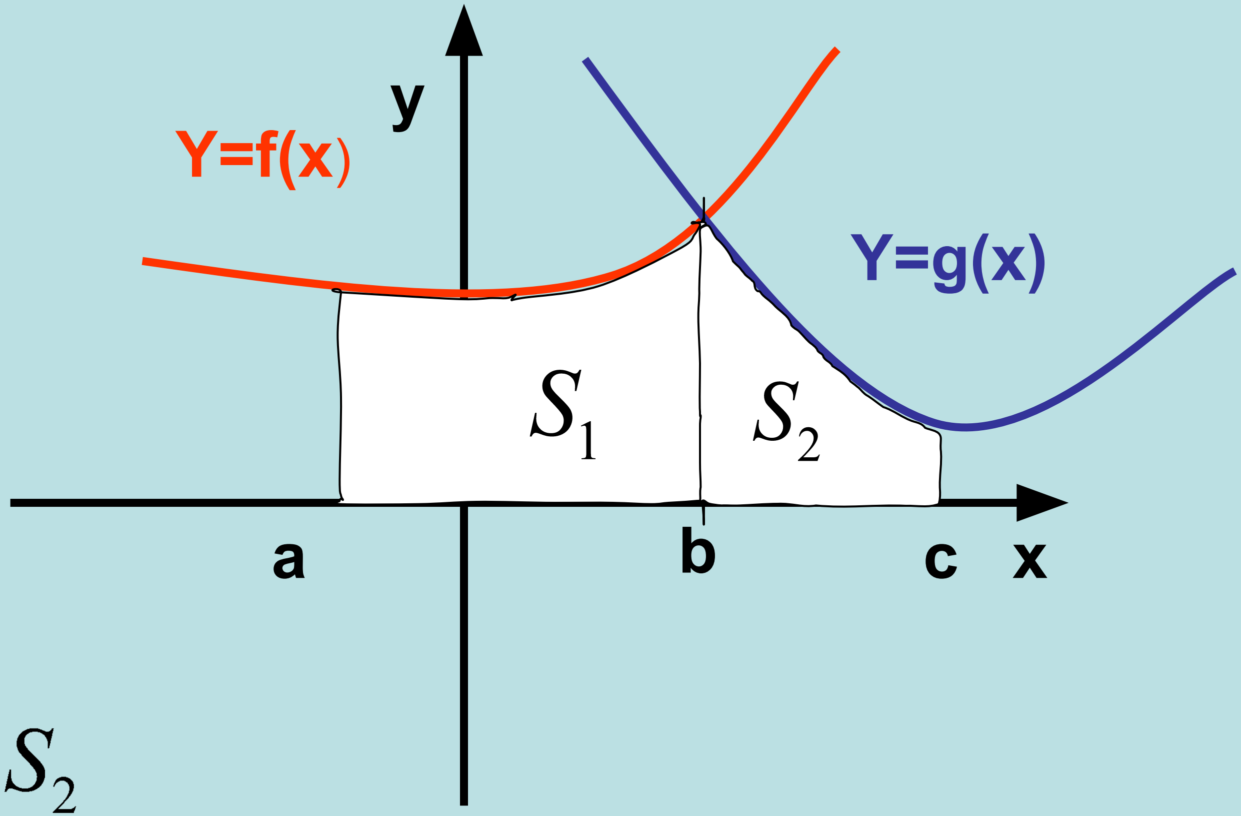
$$S_2 = G(b) - G(a)$$

$$F^{/}(x) = f(x)$$

$$G^{/}(x) = g(x)$$

$$b)\,S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Записать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции



$$S = S_1 + S_2$$

$$S = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$$

$$S_1 = F(b) - F(a)$$

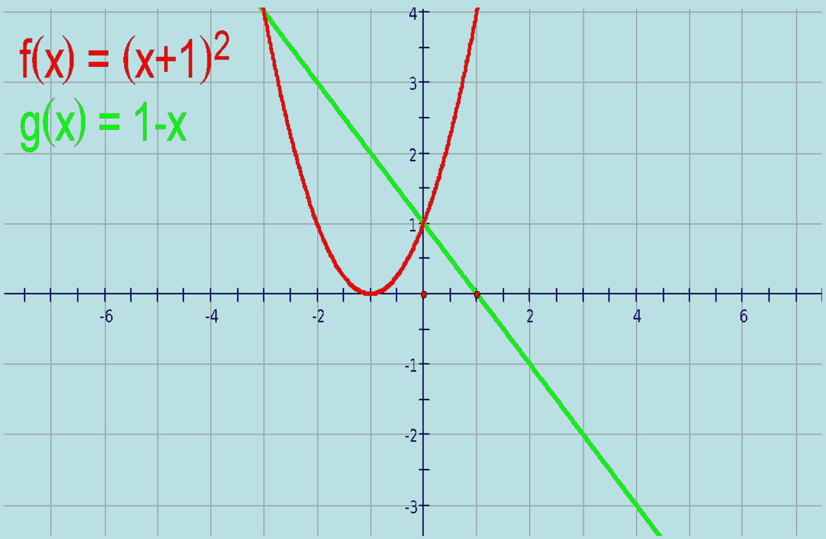
$$S_2 = G(c) - G(b)$$

Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

1) $y=(x+1)^2$

$y=1-x$

Решение:



$$S=S_2+S_1$$

$$S_1=F(0)-F(-1)$$

$$F(x)=\frac{x^3}{3}+x^2+x$$

$$F(0)=0$$

$$F(-3)=-9+9-3=-3$$

$$S_1=3$$

$$S=\frac{15}{2}-3=\frac{9}{2}$$

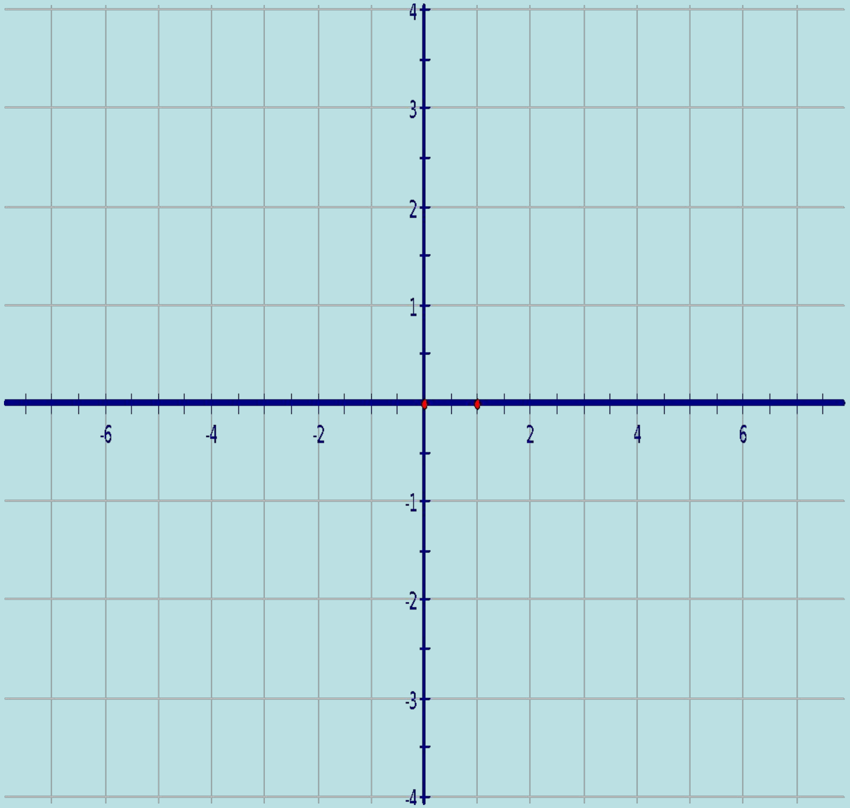
$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 3=\frac{15}{2}$$

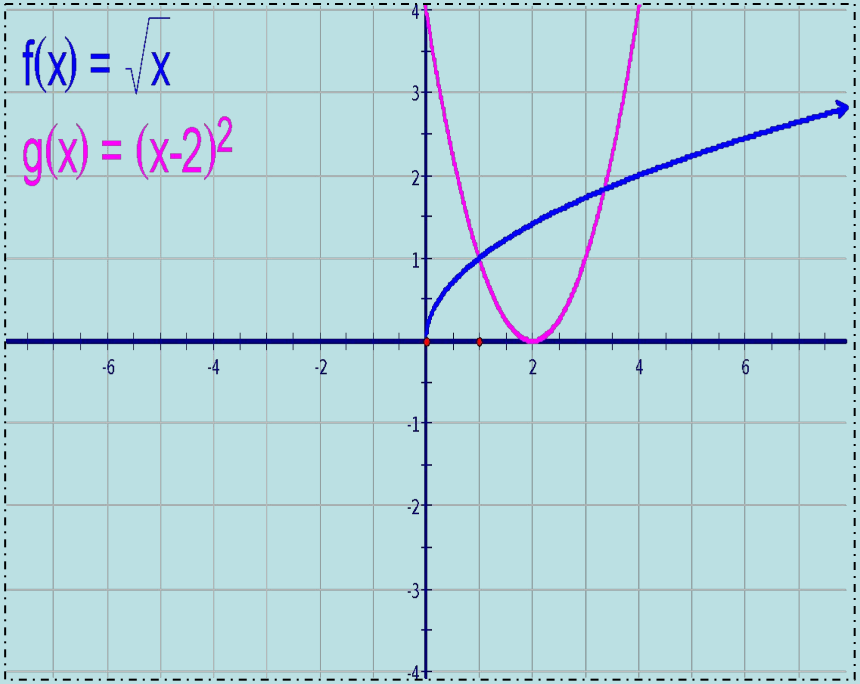
2) $y=\sqrt{x}$

$y=(x-2)^2$

Ox

Решение:





Решение

$$\sqrt{x} = (x-2)^2$$
$$x = 1$$
$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\,dx + \int_1^2 (x-2)^2\,dx =$$
$$\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^1 + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 4x\right)\Big|_1^2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} - 2\cdot 4 + 8 - \frac{1}{3} + 2 - 4 =$$
$$= 3 - 2 = 1$$

3) Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $y = \frac{4}{x}$

Касательной к ней, проходящей через точку с абсциссой x=2, и прямыми y=0, x=6.

1) способ:

$$S=\int_2^4\left(\frac{4}{x}-(4-x)\right)dx+\int_4^6\frac{4}{x}dx=$$

$$\left(4\ln x-4x+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_2^4+4\ln x\Big|_4^6=$$

$$=4\ln 4-16+8-4\ln 2+8-2+4\ln 6-4\ln 4=$$

$$-2+4(\ln 6-\ln 2)=4\ln 3-2$$

2 способ

$$S_1 = \int_2^4 \frac{4}{x}dx = 4\ln x\Big|_2^4 = 4\ln 6 - 4\ln 2 = 4\ln 3$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$$

$$S = S_1 - S_2 = 4\ln 3 - 2$$

3 способ

1.

$$S = S_1 - S_2$$

$$S_1 = F(6) - F(2)$$

$$F(x) = 4\ln|x|$$

$$F(6) = 4\ln 6$$

$$F(2) = 4\ln 2$$

$$S_1 = 4\ln 3$$

2.

$$S_2 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$$

$$S = 4\ln 3 - 2$$

4) Используя геометрические соображения, вычислить интеграл:

$$a)\int_{0}^{4}\sqrt{4x-x^{2}}\,dx$$

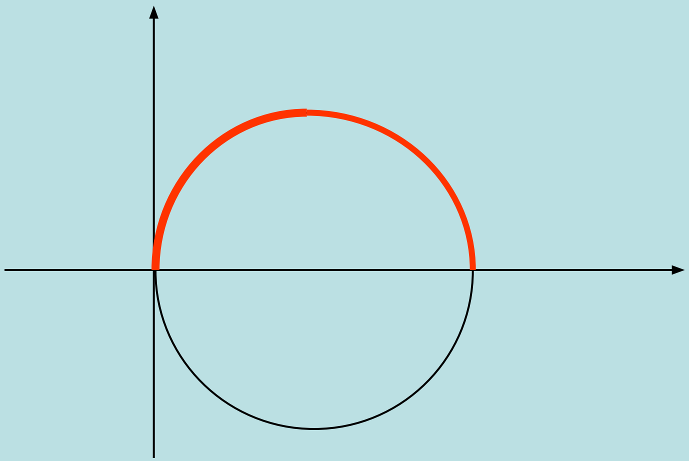
$$б)\int_{-1}^{0}\sqrt{-x^{2}-2x}\,dx$$

Решение. а) Имеем:

$$y = \sqrt{4x - x^2};$$

$$y^2 = 4x - x^2;$$

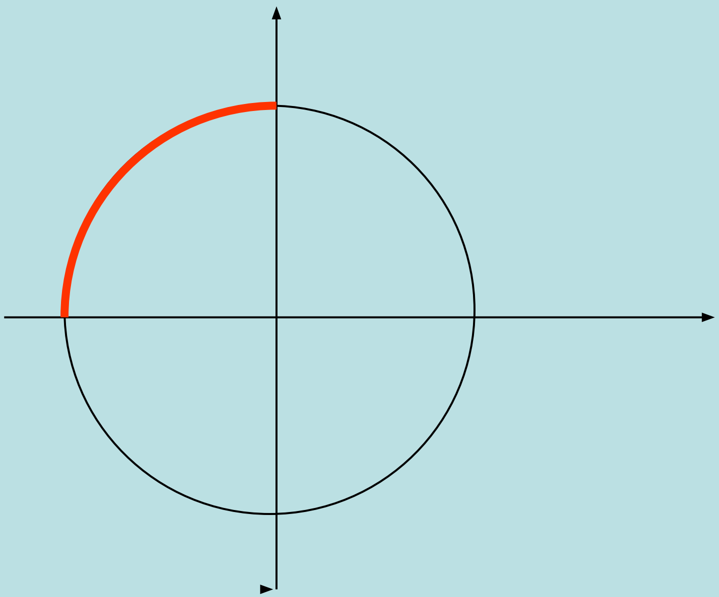
$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$



Это уравнение окружности радиуса r=2 с центром в точке (2;0).
Значит, заданным интегралом выражается площадь половины круга.

$$S = 0{,}5\pi r^2 = 0{,}5\pi \cdot 4 = 2\pi$$

б) Имеем:



$$y = \sqrt{-x^2 - 2x};$$

$$(x+1)^2 + y^2 = 1^2.$$

$$S = 0{,}25 \cdot \pi \cdot r^2 = 0{,}25 \cdot \pi \cdot 1 = 0{,}25 \cdot \pi$$

5) Вычислить интеграл:

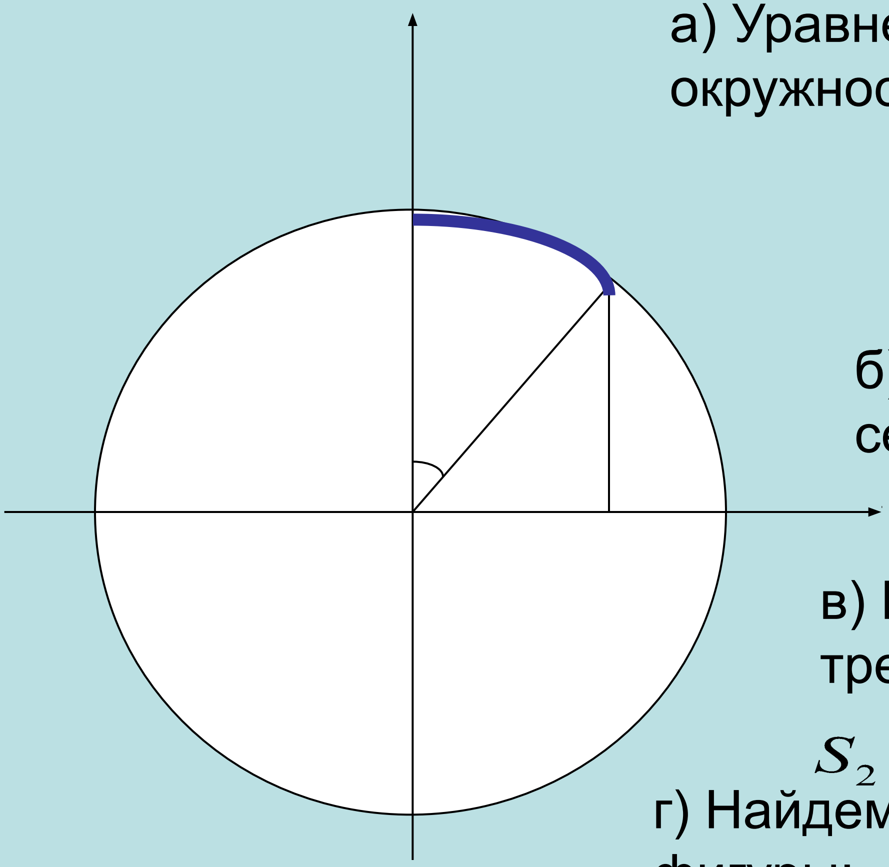
$$а)\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$б)\int_{-4}^{4}\sqrt{64-x^2}\,dx$$

$$в)\int_0^{5}|x-1|\,dx$$

а) Фигура, площадь которой выражается заданным интегралом, состоит из сектора круга радиусом 2 и центральным углом $45°$ И прямоугольного равнобедренного треугольника с катетом

Решение:



а) Уравнение окружности:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$y^2 + x^2 = 4$$

б)Найдем площадь сектора:

$$S = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot 45°}{360°} = \frac{\pi \cdot 4}{8} = \frac{\pi}{2}$$

в) Найдем площадь треугольника:

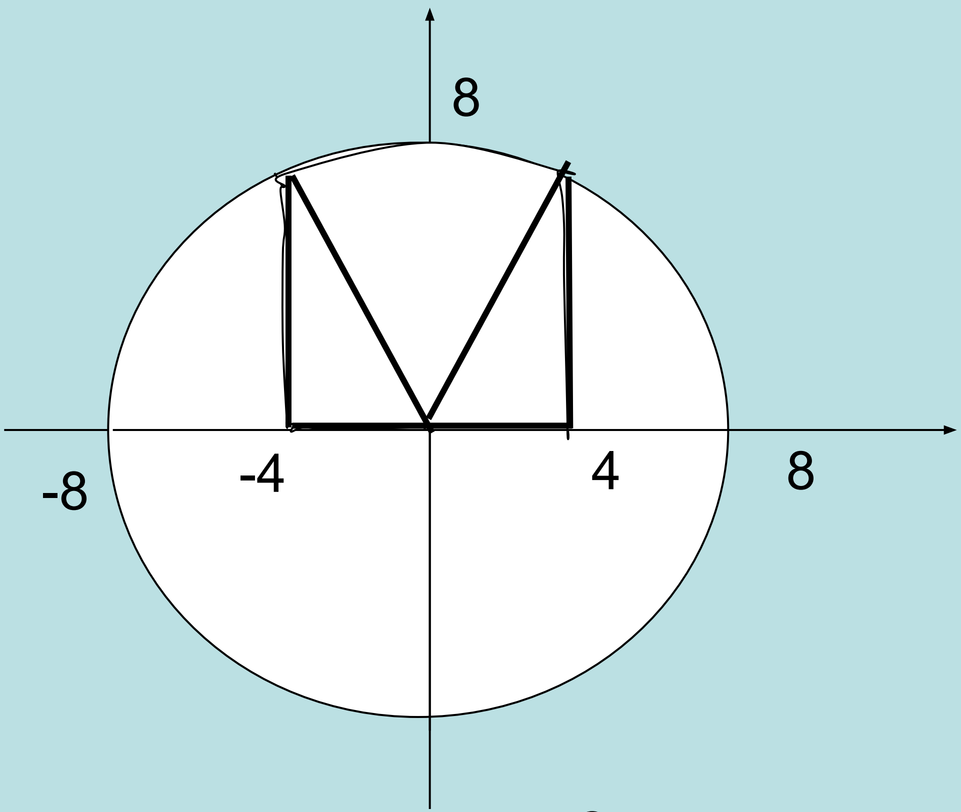
$$S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 1$$

г) Найдем площадь, заданной фигуры:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} + 1$$

б)

Площадь, заданной фигуры можно найти как сумму площади сектора и двух прямоугольных треугольников.



Решение:

$$y=\sqrt{64-x^2}$$

$$y^2+x^2=64$$

$$S_1=\frac{\pi\cdot 64\cdot 60^\circ}{360^\circ}=\frac{32\cdot\pi}{3}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{2}\cdot 2=16\sqrt{2}$$

$$S=\frac{32\cdot\pi}{3}+16\sqrt{2}$$

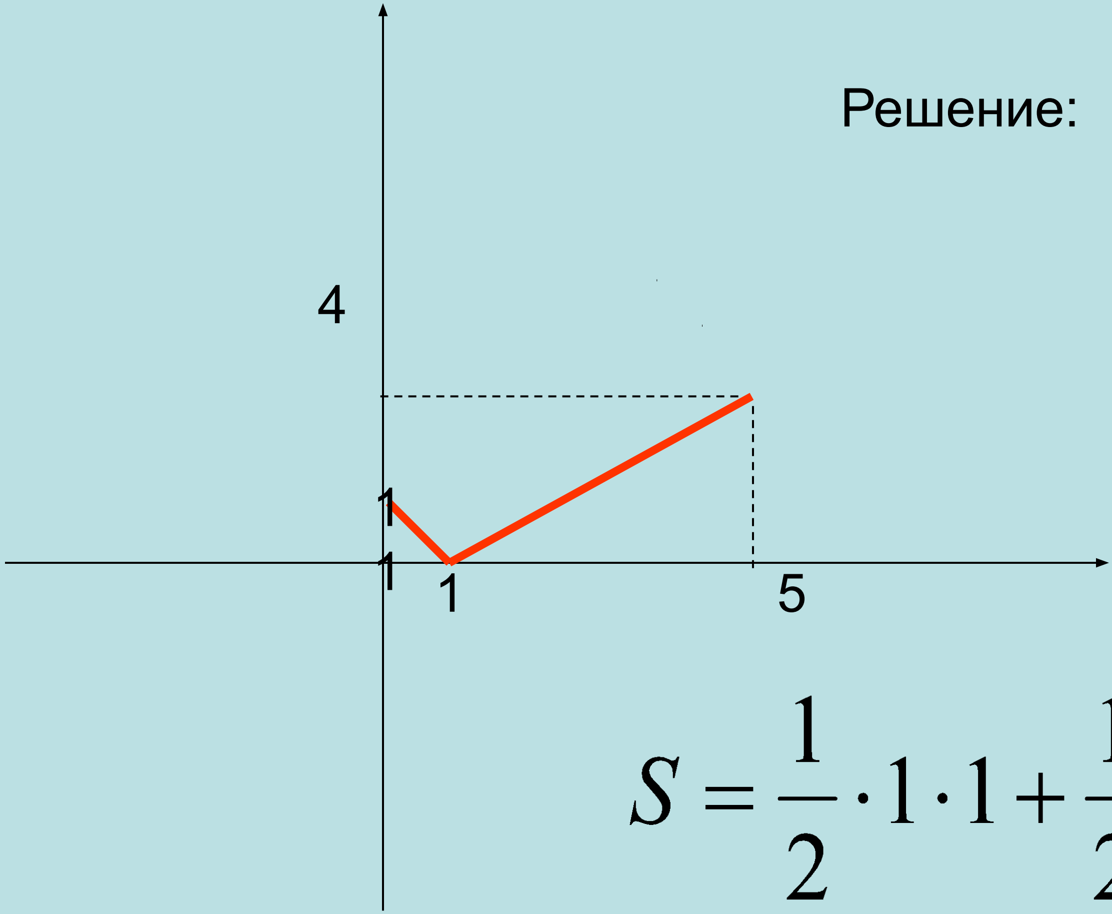
Ответ:

$$S=\frac{32\pi}{3}+16\sqrt{2}$$

Г)

Площадь, заданной фигуры можно найти как сумму
площадей двух прямоугольных треугольников.

Решение:



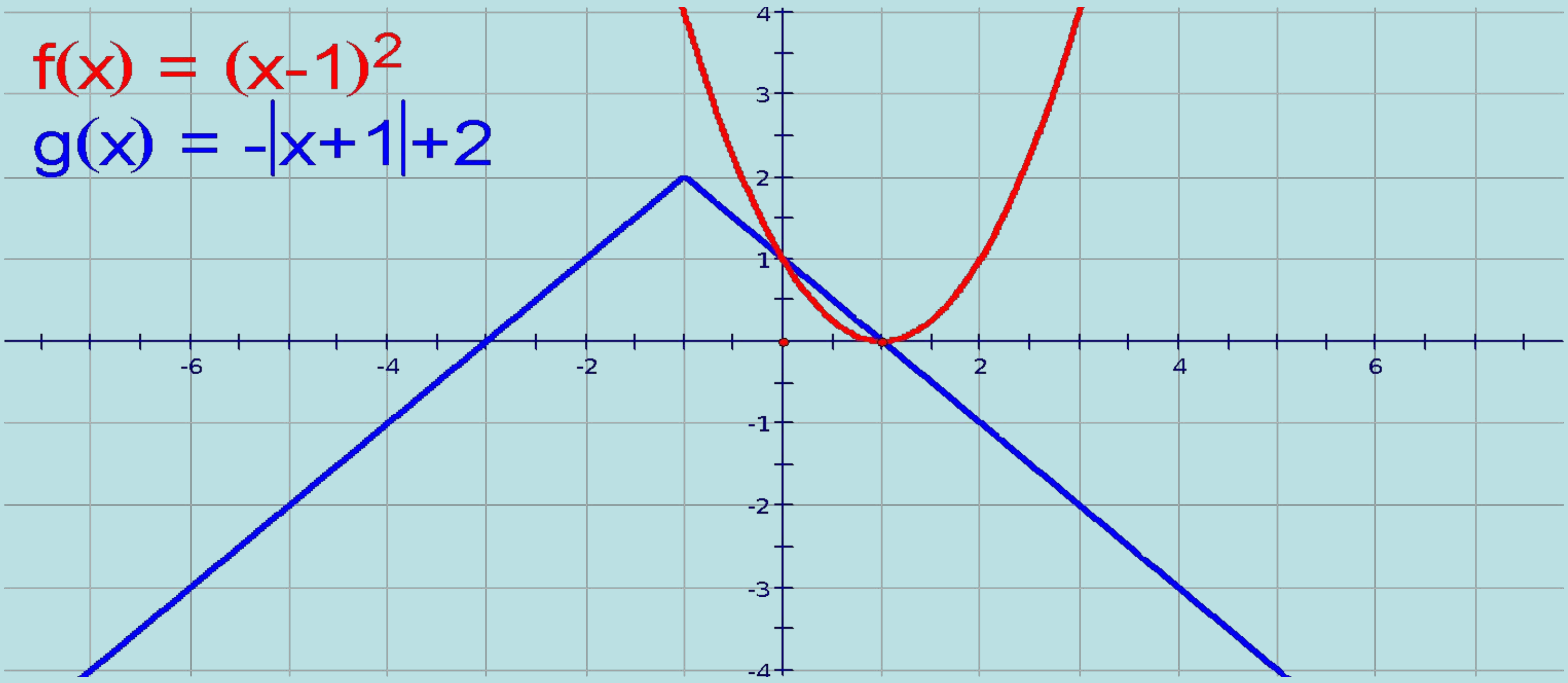
$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8{,}5$$

Ответ: 8,5

6) Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$a)\ y = (x-1)^2$$

$$y = -|x+1| + 2$$



Решение:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \int_0^1 (x-1)^2 dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 1 + 1 = \frac{1}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

7)

Найти площадь фигуры, ограниченной графиком функции и касательной к нему в точке x=3

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

Заданная функция имеет точку максимума (1;5) и точку минимума (3;1).Построим график этой функции. Касательная к нему в точке x=3 параллельна оси абсцисс и имеет с графиком еще одну общую точку (0;1).

$$S=\int_0^3\left(\left(x^3-6x^2+9x+1\right)-1\right)dx=\frac{27}{4}$$