

Презентация по математике

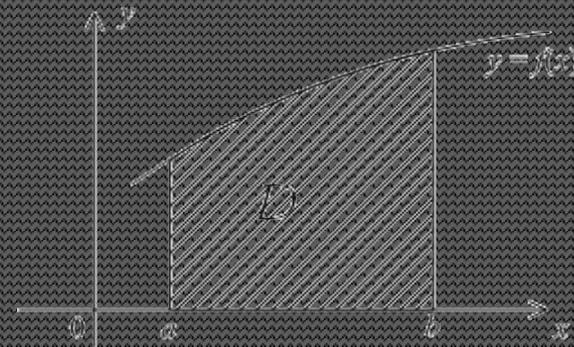
На тему : Площадь криволинейной трапеции.
Формула Ньютона-Лейбница

Площадь криволинейной трапеции

Определение:

фигура, ограниченная графиком неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции f , осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$.

Изображения криволинейных трапеций:

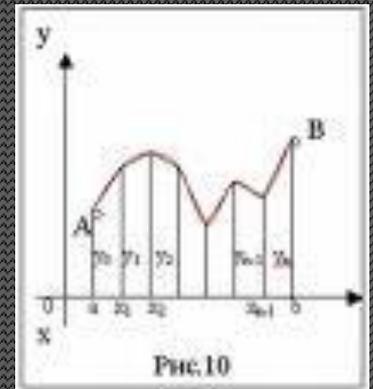


Теорема о вычислении площади криволинейной трапеции

Теорема:

Если f – непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F – ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a)$$



Доказательство

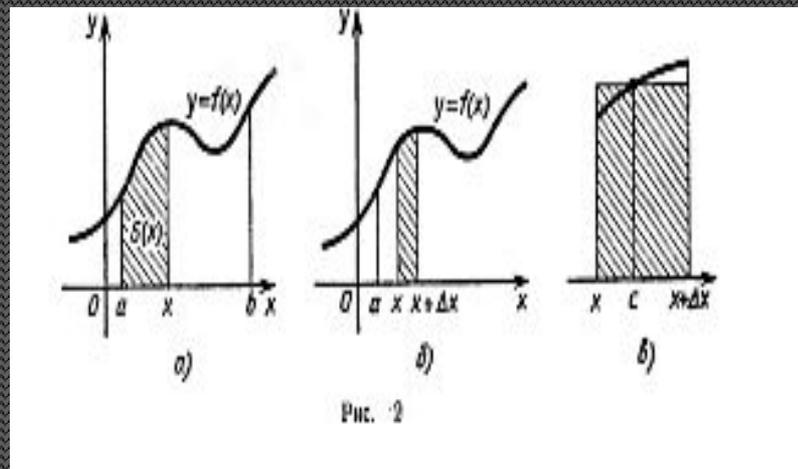
Доказательство : Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. Если $a < x \leq b$, то $S(x)$ – площадь той части криволинейной трапеции , которая расположена левее вертикальной прямой , проходящей через точку $M(x; 0)$ (рис 2.а)

Если $x = a$, то $S(a) = 0$. Отметим , что $S(b) = S$ (S – площадь криволинейной трапеции) .

Нам осталось доказать , что $S'(x) = f(x)$ (2)

По определению производной докажем, что $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$ (3)

Δx
при $\Delta x \rightarrow 0$



Доказательство

Выясним геометрический смысл числителя $\Delta S(x)$. Для простоты рассмотрим случай $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, то $\Delta S(x)$ – площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Дальнейшее доказательство рассмотрите самостоятельно. Итак, мы получили, что S есть первообразная для f . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех x , принадлежащих промежутку $[a; b]$, имеем:

$$S(x) = F(x) + C,$$

где C – некоторая постоянная, а F – одна из первообразных для функции f . Для нахождения C подставим $x = a$:

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

откуда $C = -F(a)$. Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу (4), получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

Пусть на отрезке $[a; b]$ оси Ox задана непрерывная функция f , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), называют **криволинейной трапецией**. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 1, а — д.

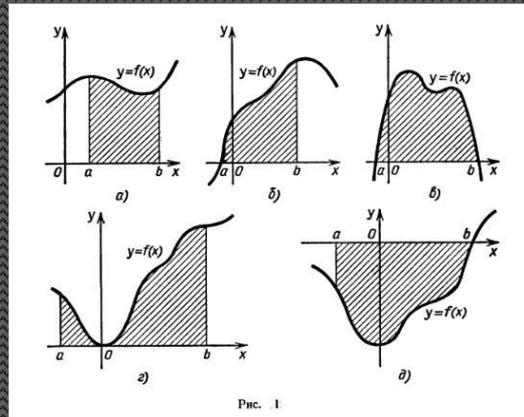


Рис. 1

- Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

Теорема. Если f — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция, а F — ее первообразная на этом отрезке, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции (рис. 2) равна приращению первообразной на отрезке $[a; b]$ т. е.

- $S = F(b) - F(a)$. (1)

Доказательство. Рассмотрим функцию $S(x)$, определенную на отрезке $[a; b]$. Если $a < x \leq b$, то $S(x)$ — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку $M(x; 0)$ (рис. 2, а). Если $x = a$, то $S(a) = 0$. Отметим, что $S(b) = S$ (S — площадь криволинейной трапеции).

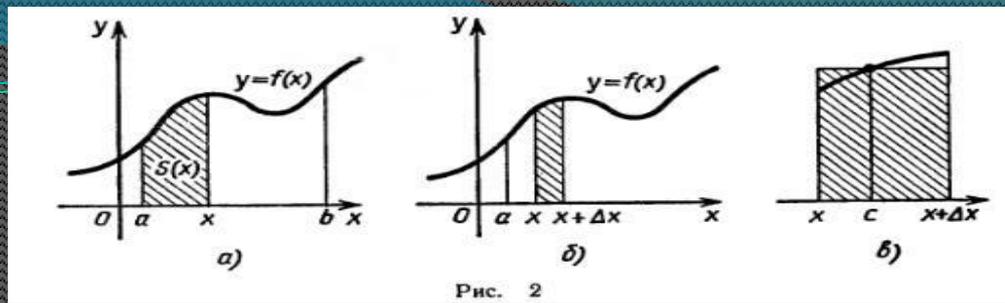


Рис. 2

- Докажем, что $S'(x)=f(x)$. (2)

По определению производной надо доказать, что

- при (3)

Выясним геометрический смысл числителя $\Delta S(x)$. Для простоты рассмотрим случай $\Delta x > 0$. Поскольку $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$, то $\Delta S(x)$ — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 2, б. Возьмем теперь прямоугольник той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 2, в). В силу непрерывности функции f верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции в некоторой точке с абсциссой $c \in [x; x + \Delta x]$ (в противном случае этот прямоугольник либо содержится в части криволинейной трапеции над отрезком $[x; x + \Delta x]$, либо содержит ее; соответственно его площадь будет меньше или больше площади $\Delta S(x)$). Высота прямоугольника равна $f(c)$. По формуле площади прямоугольника имеем $\Delta S(x) = f(c) \Delta x$, откуда (эта формула верна и при $\Delta x < 0$). Поскольку точка c лежит между x и $x + \Delta x$; то c стремится к x при $\Delta x \rightarrow 0$. Так как функция f непрерывна, при $\Delta x \rightarrow 0$ $f(c)$ стремится к $f(x)$. Итак, при $\Delta x \rightarrow 0$ формула (2) доказана. Мы получили, что S есть первообразная для f . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех $x \in [a; b]$ имеем:

- $S(x) = F(x) + C,$

где C — некоторая постоянная, а F — одна из первообразных для функции f . Для нахождения C подставим $x = a$: $F(a) + C = S(a) = 0,$

- откуда $C = -F(a)$. Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна $S(b)$, подставляя $x = b$ в формулу (4), получим:

- $S = S(b) = F(b) - F(a).$

Пошаговый пример

Пример: Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$

Решение:

1. Построим криволинейную трапецию:

$y = 4 - x^2$ - квадратичная функция, график - парабола, ветви направлены вниз.
 $y = 0$ - ось абсцисс.

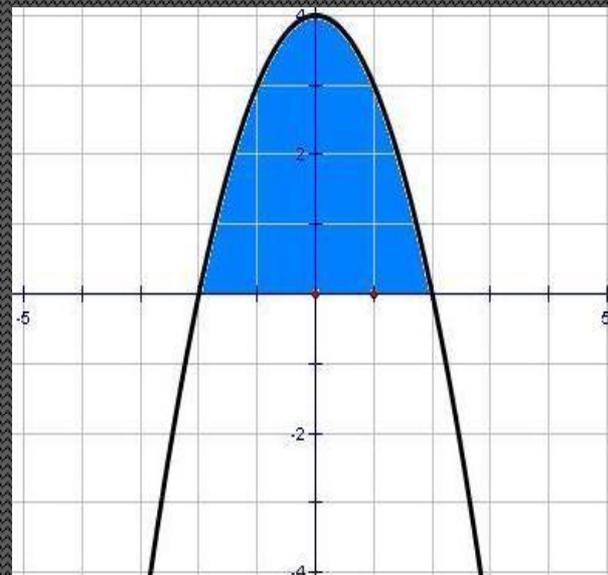
2. Найдём $[a; b]$:

$$4 - x^2 = 0; x^2 = 4$$

$$x = -2 \text{ или } x = 2, \text{ т. е. } a = -2 \quad b = 2$$

3. Найдём площадь криволинейной трапеции по формуле: $S = F(b) - F(a)$

$$S = F(2) - F(-2) = \underline{10,6}$$



Формула Ньютона- Лейбница

$$\int_b^a f(x) = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Определённый интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

ТЕОРЕМА. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $F(x)$ – любая первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда определенный интеграл от функции $f(x)$ на $[a,b]$ равен приращению первообразной $F(x)$ на этом отрезке, т.е.

Нахождение определенных интегралов с использованием формулы Ньютона–Лейбница (2) осуществляется в два шага: на первом шаге, используя технику нахождения неопределенного интеграла, находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором применяется собственно формула Ньютона–Лейбница – находится приращение первообразной, равное искомому интегралу. В связи с этим, введем обозначение для приращения первообразной, которое удобно использовать при записи решений. По определению положим

Следует подчеркнуть, что при применении формулы Ньютона – Лейбница можно использовать любую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$, например имеющую наиболее простой вид при $C=0$

Формула Ньютона Лейбница

Из результатов предыдущего параграфа следует, что непрерывная на $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную, например

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt .$$

Поставим теперь следующую задачу: зная одну из первообразных $\Phi(x)$ функции $f(x)$ на $[a; b]$ вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$, или что тоже самое по известному неопределенному интегралу найти определенный интеграл.

Пусть $F(x)$ - любая другая первообразная функции $f(x)$ на том же отрезке $[a; b]$. Так как две первообразные отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то получаем равенство

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R} .$$

Подставим в это равенство значение $x = a$

$$\int_a^a f(t) dt = F(a) + C \Rightarrow F(a) + C = 0 \Rightarrow C = -F(a)$$

т.е.

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a; b]$$

Полагая $x = b$ и обозначая переменную интегрирования за x , получаем основную формулу интегрального исчисления:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \quad (4)$$

которая называется **формулой Ньютона - Лейбница**.

Формула Ньютона - Лейбница дает правило вычисления определенного интеграла: *значение определенного интеграла на отрезке $[a; b]$ от непрерывной функции $f(x)$ равно разности значений любой ее первообразной, вычисленной при $x = b$ и $x = a$.*

Разность $F(b) - F(a)$ в правой части равенства (4) обычно записывают так: $F(x)|_a^b$. Тогда формула Ньютона - Лейбница принимает следующий вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

Формула 4 позволяет вычислять определенный интеграл не по определению (т.е. вычисляя предел интегральных сумм), а сводится к задаче нахождения неопределенного интеграла.

Основные методы вычисления определенного интеграла

Вычисление простейших интегралов с помощью формулы Ньютона - Лейбница.

Если $F(x)$ - одна из первообразных непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Эта формула позволяет свести вычисление определенного интеграла к вычислению неопределенного.

Примеры

$$1) \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1;$$

$$2) \int_0^1 (6x^2 + 3) dx = (2x^3 + 3x) \Big|_0^1 = (2 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1) - (2 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 5;$$

$$3) \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$$

$$4) \int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}} = \int_1^6 (3+x)^{-1/2} dx = 2\sqrt{3+x} \Big|_1^6 = 2(\sqrt{9} - \sqrt{2}) = 2;$$

$$5) \int_{-1}^0 e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x} \Big|_{-1}^0 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

Замена переменной (подстановка) в определенном интеграле

Этот метод, как и в случае неопределенного интеграла, позволяет упростить вычисления, т.е. привести подынтегральное выражение к табличному виду. Имеет место следующая теорема

Теорема 5 Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[t_1, t_2]$, причем $\varphi([t_1, t_2]) = [a; b]$ и $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$, то справедлива формула

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt} \quad (5)$$

▷ Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Поскольку $\varphi(t_1) = a, \varphi(t_2) = b$, то по формуле Ньютона - Лейбница имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = F(\varphi(t_1)) - F(\varphi(t_2)) = \int_{t_1}^{t_2} d(F(\varphi(t))) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} F'(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \triangleleft \end{aligned}$$

Формула (5) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Пример 1: Вычислить $\int_0^9 \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$;

Осуществим замену переменной: $x = t^2$, тогда $dx = 2tdt$. Пределы интегрирования сведем в таблицу:

x	0	9
t	0	3

По формуле (5)

$$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int_0^3 \frac{2tdt}{1+t} = 2 \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) \Big|_0^3 = 6 - 2 \ln 4.$$

Пример 2: Вычислить $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$

Произведем замену $\sin x = t$. Тогда $\cos x dx = dt$.

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$
t	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Применяем формулу (5)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx = \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} \Big|_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{2} \left(4 - \frac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Интегрирование по частям в определенном интеграле.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ функции. Тогда $d(uv) = u dv + v du$. Проинтегрируем это равенство на отрезке $[a; b]$

$$\int_a^b d(uv) = \int_a^b u dv + \int_a^b v du. \quad (6)$$

С другой стороны, по формуле Ньютона - Лейбница

$$\int_a^b d(uv) = uv \Big|_a^b$$

Следовательно, формула (6) принимает вид:

$$\boxed{\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du} \quad (7)$$

Формула (7) называется формулой интегрирования по частям в определенном интеграле.

Пример 1: Вычислить $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \pi + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi$$

Пример 2: Вычислить $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \frac{dx}{\cos^2 x}, v = \operatorname{tg} x \end{array} \right| = x \operatorname{tg} x \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \frac{\pi}{4} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} - \ln \cos x \Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \ln \cos \frac{\pi}{4} - \ln \cos 0 = \frac{\pi}{4} + \ln \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \ln \sqrt{2} \approx 0,92.$$

Несобственные интегралы

Понятие несобственных интегралов

При введении понятия определенного интеграла как предела интегральной суммы мы требовали выполнения двух условий :

- 1) пределы интегрирования a и b являются конечными;
- 2) подынтегральная функция $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ непрерывна или имеет конечное число точек разрыва первого рода.

В этом случае определенные интегралы называются собственными. Если хотя бы одно из указанных условий не выполнено интеграл называется несобственным.

Несобственные интегралы являются обобщением понятия определенного интеграла в случае бесконечного промежутка или неограниченной функции.

Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования (первого рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; \infty)$. Тогда она будет непрерывна на любом конечном отрезке $[a; b], a < b$. Для функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$ существует определенный интеграл $I(b)$, зависящий от верхнего предела интегрирования:

$$I(b) = \int_a^b f(x) dx .$$

Этот интеграл определяет некоторую величину, например площадь соответствующей криволинейной трапеции. Будем неограниченно увеличивать верхний предел интегрирования, при этом возможны два случая: либо $I(b)$ имеет конечный предел, либо не имеет.

Определение 2 Несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $[a; \infty)$ называется предел $I(b)$ при $b \rightarrow \infty$:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

Аналогично определяется *несобственный интеграл с переменным нижним пределом интегрирования*

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad (9)$$

Если пределы в правых частях формул (8) и (9) существуют и конечны, то соответствующие несобственные интегралы называются сходящимися, если пределы не существуют или бесконечны, то расходящимися.

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами интегрирования от непрерывной функции $f(x)$ на промежутке $(-\infty; \infty)$, обозначаемый $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$,

предварительно представляем в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx, \quad c \in (-\infty; \infty).$$

Тогда по определению

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^c f(x) dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x) dx, \quad (10)$$

причем этот интеграл называется сходящимся, если оба предела существуют.

Интегралы (8) - (10) называются несобственными интегралами первого рода.

С геометрической точки зрения сходящийся несобственный интеграл $\int_a^{\infty} f(x) dx$ означает, что фигура, ограниченная кривой $y = f(x) \geq 0$, прямыми $x = a, y = 0$ и бесконечно вытянутая вдоль в направлении оси OX имеет конечную площадь.