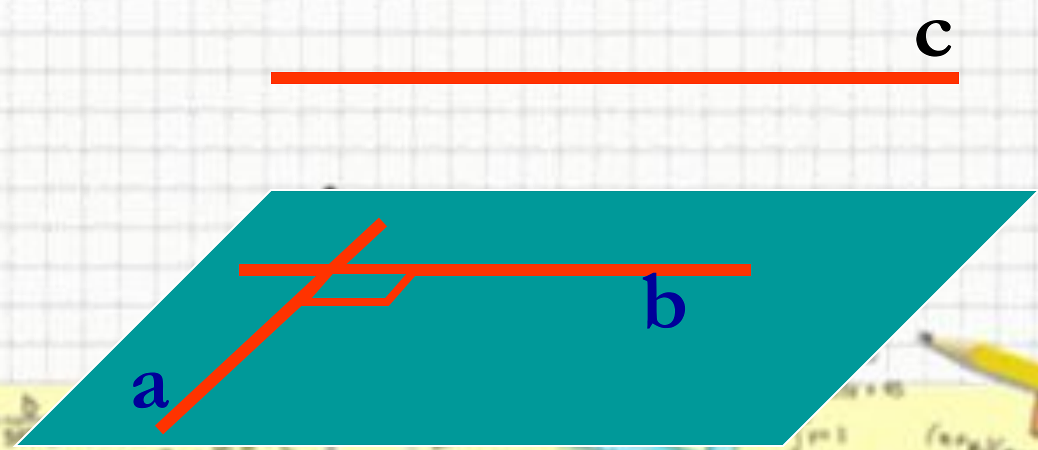
Математика

Перпендикулярность прямых
Перпендикулярность прямой и плоскости.
Перпендикулярность плоскостей
Проверь себя

Преподаватель математики
ОГБОУ ПЛ №1 г.Иваново
Мочалова Е.В.

Перпендикулярные прямые в пространстве

- *Две прямые в пространстве называются перпендикулярными (взаимно перпендикуляр-ными), если угол между ними равен 90°.*
- *Обозначается a $\perp$ b*
- *Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.*

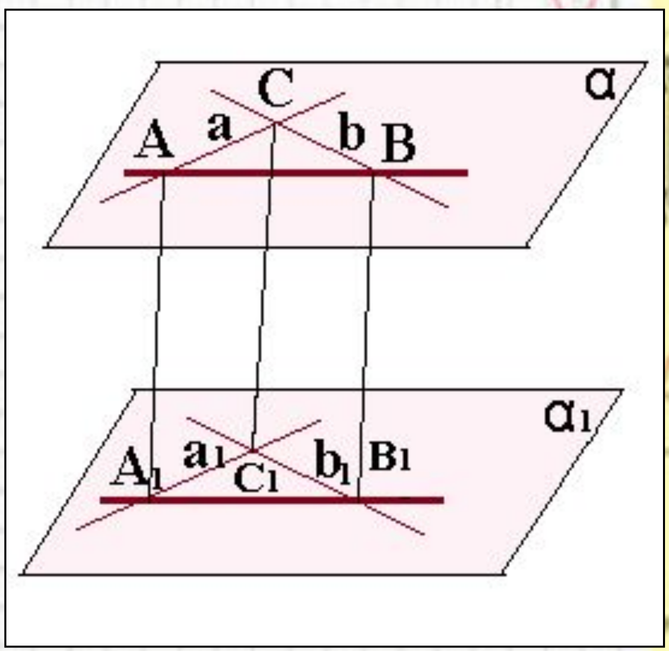


Математика

Перпендикулярные прямые в пространстве

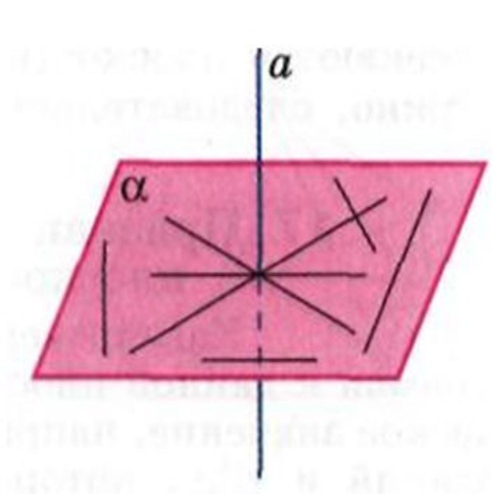
- ***Теорема.***

Если две пересекающиеся прямые в пространстве параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.



Через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

Перпендикулярность прямо… и



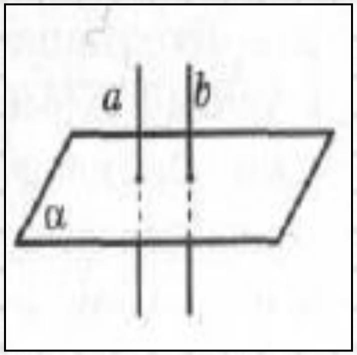
Прямая называется **перпендикулярной к плоскости**, если она перпендикулярна к **любой** прямой, лежащей в этой плоскости.

Прямая a, перпендикулярная плоскости α ($a \perp \alpha$), означает, что $a \perp b$, $a \perp c$, где $b \subset \alpha$, $c \subset \alpha$.

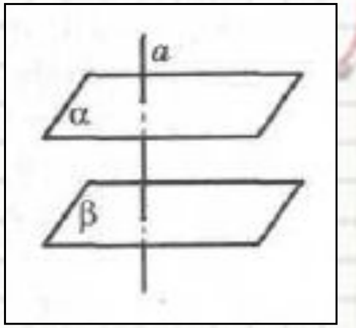
Математика

Свойства :

1. Если плоскость перпендикулярна одной
- из двух параллельных прямых,
- то она перпендикулярна другой
- прямой. ($a \perp \alpha$ b и a II b => $b \perp \alpha$)



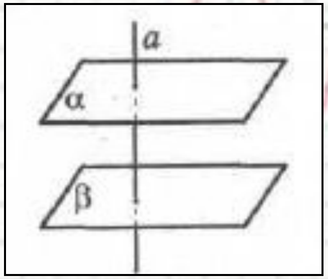
- 2 Если две прямые перпендикулярны
- одной и той же плоскости,
- то они параллельны. ($a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$ => a II b)



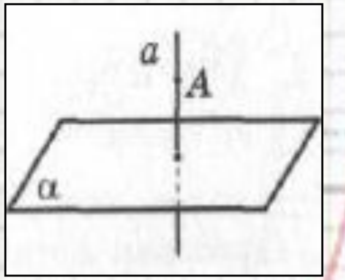
- 3 Если прямая перпендикулярна
- одной из двух параллельных
- плоскостей, то она перпендикулярна
- и другой плоскости. (α II β и $a \perp \alpha$ => $a \perp \beta$)

Свойства :

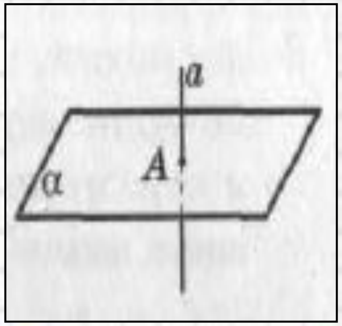
- *4 Если две различные плоскости*
- *перпендикулярны одной и той же прямой,*
- *то эти плоскости параллельны.*
- *(a ⊥ α и a ⊥ β => a II β)*



- *5 Через любую точку пространства можно*
- *провести прямую, перпендикулярную*
- *данной плоскости, и притом только одну.*



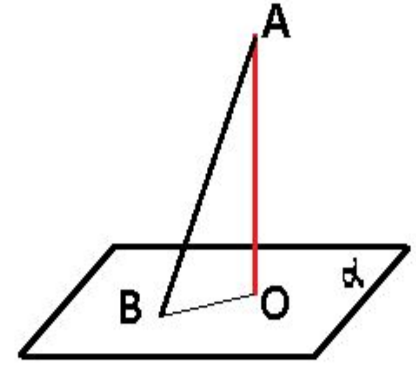
- *6 Через любую точку прямой можно*
- *провести плоскость, перпендикулярную ей*
- *и притом только одну.*



Математика

Перпендикуляр и наклонная

- ***Перпендикуляр, опущенный из данной точки на плоскость***, - отрезок, лежащий на прямой, проходящей через эту точку перпендикулярно плоскости, соединяющий данную точку с точкой плоскости.
- *Конец этого отрезка, лежащий на плоскости, называют* ***основанием перпендикуляра.***



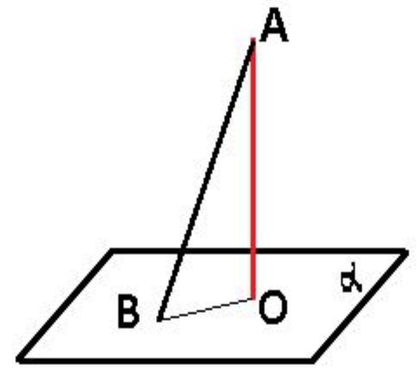
AO - перпендикуляр к плоскости α
AB - наклонная к плоскости α
BO - проекция наклонной AB на плоскость α

Наклонная, проведенная из данной точки к плоскости, *- любой отрезок, соединяющей данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.*

Математика

Перпендикуляр и наклонная

- *Конец отрезка, лежащий на плоскости, называют* ***основанием наклонной.***
- *Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется* ***проекцией наклонной.***



AO - перпендикуляр к плоскости α
AB - наклонная к плоскости α
BO - проекция наклонной AB на плоскость α

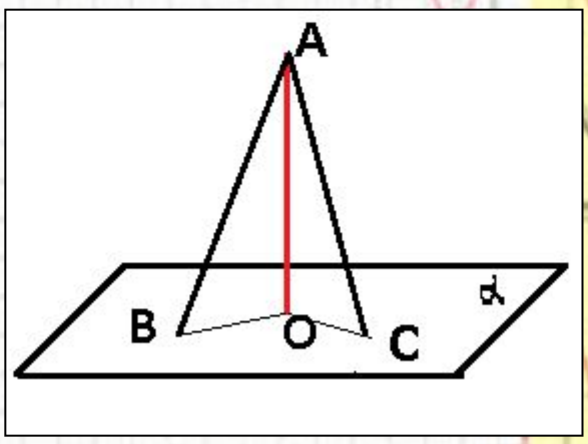
- ***<u>Свойства:</u>***

1 Перпендикуляр короче наклонной, проведенной из одной точки AO<AB.
2. Из данной точки, не лежащей на плоскости, можно провести ***только один перпендикуляр*** *к плоскости и бесконечное множество наклонных.*

Математика

Перпендикуляр и наклонная.

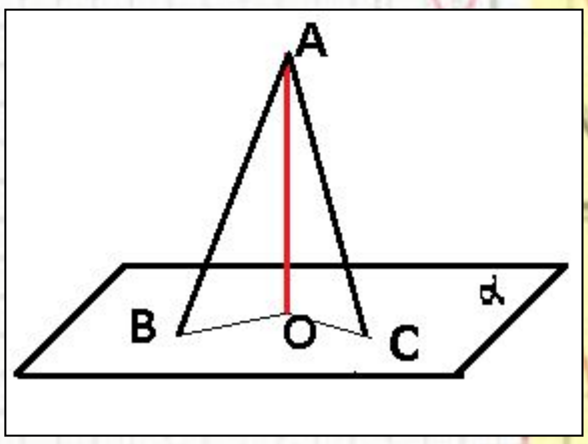
- 3. Если из одной точки к одной
- плоскости проведены перпендикуляр и две наклонные, то:
- - равные наклонные имеют равные проекции (если AB=AC, то BO=CO);
- Если проекции наклонных равны, то сами наклонные равны (если BO= CO, то AB=AC);



- Большая наклонная имеет большую проекцию (если AB>AC, то BO>CO);
- Из двух наклонных больше та, которая имеет большую проекцию (если BO>CO, то AB>AC).

Перпендикуляр и наклонная.

- ***Расстоянием*** *от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на плоскость.*

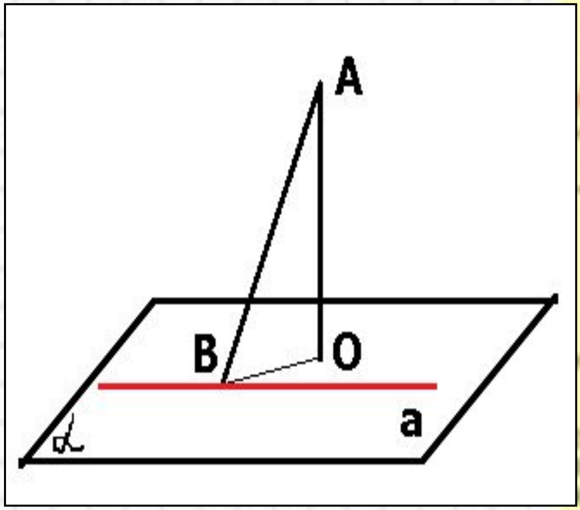


AO – расстояние от точки A до плоскости α.

Математика

Теорема о трех перпендикулярах

Если прямая, проведенная на плоскости, перпендикулярна проекции наклонной, то она перпендикулярна наклонной (если $a \perp BO$, то $a \perp AB$).



Если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной

(если $a \perp AB$, то $\perp BO$).

Математика

Теорема о трех перпендикулярах

Доказательство:

1)AB- перпендикуляр, AC- наклонная, $d \in \alpha,\ C \in d$

2) Проводим CA´‖AB. $CA' \perp \alpha$

(по свойству перпендикулярных прямой и плоскости)

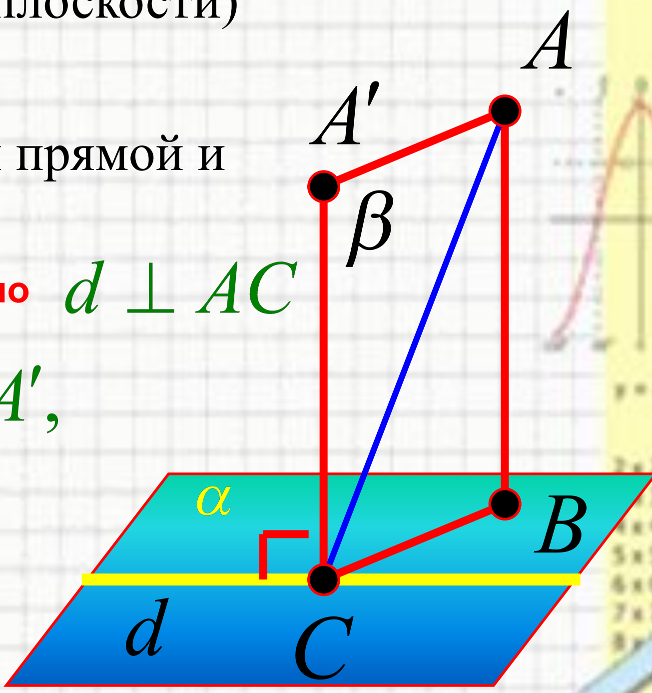
3) AB и A´C определяют β

4) $d \perp CA'$(признак перпендикулярности прямой и плоскости)

5) Если $d \perp CB,$ то $d \perp \beta,$ **следовательно** $d \perp AC$

6)Аналогично, если $d \perp CA$ и $d \perp CA',$

$d \perp \beta,$ **следовательно** $d \perp BC$



Задача

Через центр вписанной в треугольник окружности проведена прямая, перпендикулярная плоскости треугольника. Доказать, что каждая точка этой прямой ***равноудалена*** *от сторон треугольника.*

Решение:

1)A,B,C- точки касания сторон треугольника с окружностью,

O- центр окружности, S- точка на перпендикуляре

2) Так как радиус OA перпендикулярен стороне треугольника,

то по теореме о трех перпендикулярах: SA- перпендикуляр к этой стороне

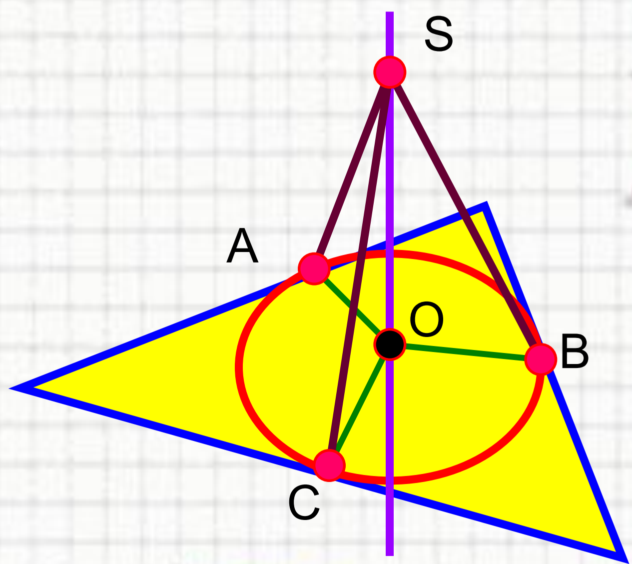
3)По теореме Пифагора:

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

где r-радиус вписанной окружности

4) $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$

5) $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$



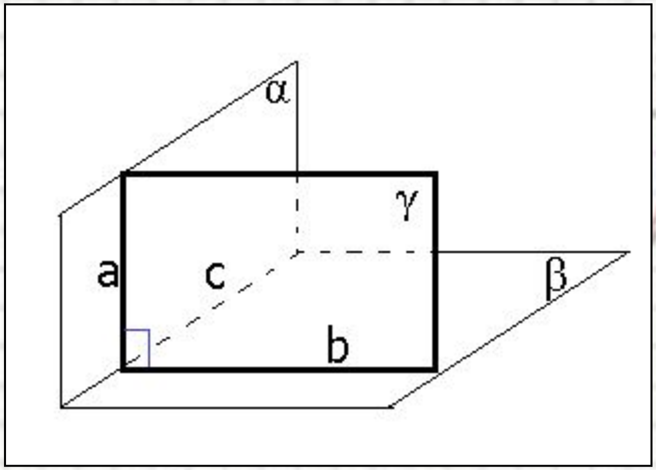
Т.е. расстояния от S до сторон треугольника *равны*

Математика

Перпендикулярность двух плоскостей

Перпендикулярные плоскости – две пересекающиеся плоскости, для которых выполняется условие, что третья плоскость, перпендикулярная линии их пересечения, пересекает их по перпендикуляр-ным прямым.

Плоскости α и β перпендику-лярны (α ⊥ β), если плоскость Y ⊥ с, Y пересека-ет α и β по взаимноперпен-дикулярным прямым a и b, (a ⊥ b).

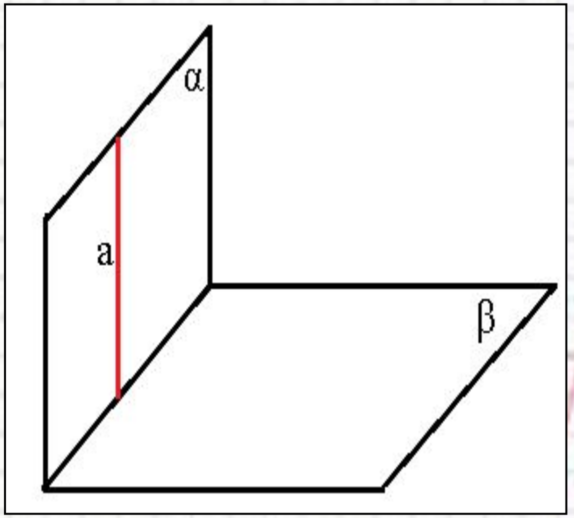


Математика

Признак перпендикулярности плоскостей

Если прямая, лежащая в одной плоскости, перпендикулярна другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны

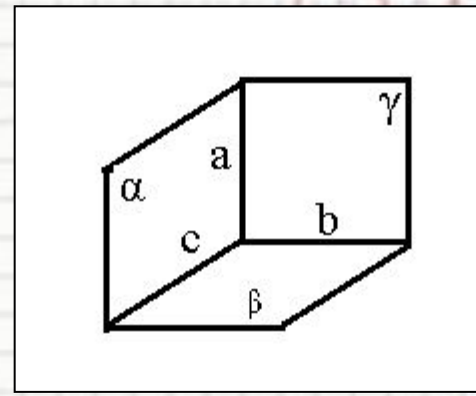
(если $a \subset \alpha$, $a \perp \beta$, то $\alpha \perp \beta$).



Математика

Свойства перпендикулярных плоскостей

1.Любая плоскость, перпендикуляр-ная прямой пересечения перпенди-кулярных плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

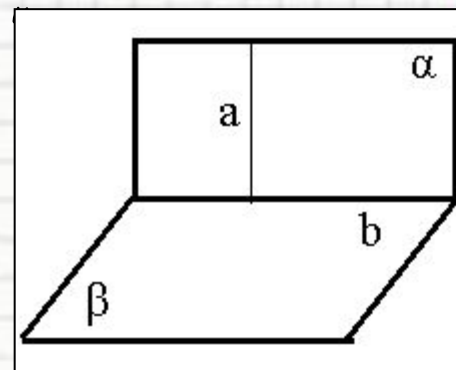


(если $\alpha\cap\beta=c$, $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap Y=a$, $\gamma\cap\beta=b$ и $\gamma\perp c$, то $a\perp b$)

2. Если прямая лежащая в одной из

двух перпендикулярных плоскостей,

перпендикулярна прямой их пересече-ния, то она перпендикулярна другой плоскости.



(если $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=b$, a€α и $a\perp b$,

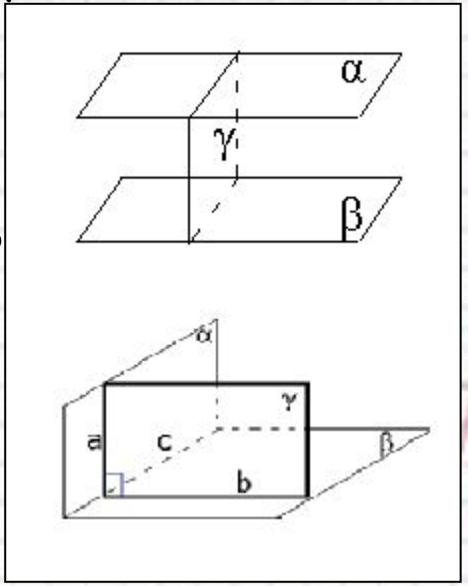
то $a\perp\beta$)

Математика

Свойства перпендикулярных плоскостей

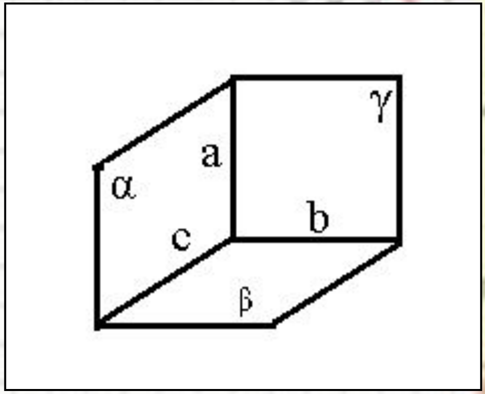
3. Через любую точку прост-ранства можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости

4 Две плоскости, перпендику-лярные третьей плоскости, или параллельны, или пересекаются по прямой, перпендикулярной третьей плоскости.



Свойства перпендикулярных плоскостей

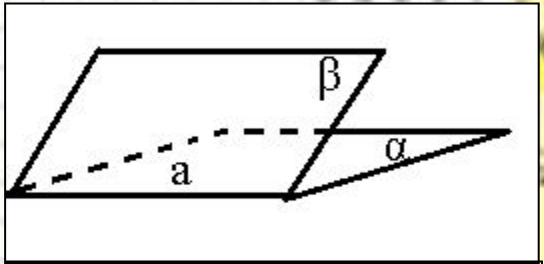
5. Три попарно перпендику-лярные плоскости пересе-каются по трем перпенди-кулярным прямым (если $\alpha \perp \beta$, $\beta \perp \gamma$, $\gamma \perp \alpha$, То $a \perp b$, $b \perp c$, $a \perp c$)



6 .Через данную прямую некоторой плоскости можно провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости.

Двугранные углы.

- **Двугранный угол** – фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, не принадлежащими одной плоскости.
- Полуплоскости называются **гранями**, а прямая, их ограничиваю-щая, - **ребром** двугранного угла.



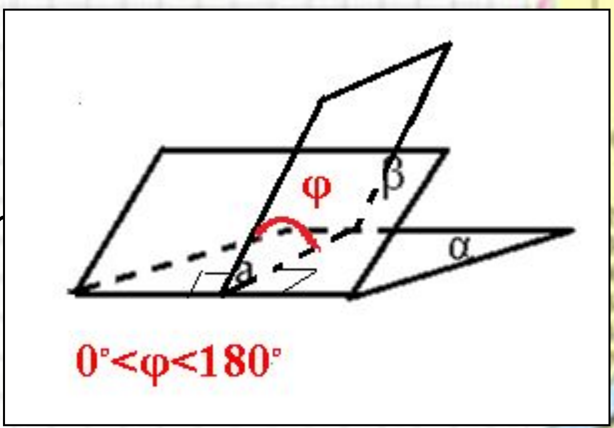
α и β – грани двугранного угла

а – ребро двугранного угла

Двугранные углы.

Линейный угол двугранного угла – угол, являющийся разрезом этого двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру (угол между двумя перпендикулярами к ребру двугранного угла, лежащими на гранях двугранного угла и имеющими на ребре общее начало).

Мера двугранного угла – мера соответствующего ему линейного угла.
Мера двугранного угла находится в переделах от 0 до 180 градусов.



Математика

Общим перпендикуляром двух скрещивающихся прямых *называют отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.*

Утверждение: две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми *называется длина их общего перпендикуляра*

Математика

Проверь себя

- Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
- Дайте определение перпендикулярности прямой и плоскости.
- Сформулируйте признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- Если плоскость перпендикулярна одной из двух …. прямых , то она ,,,, другой прямой.
- Две прямые, перпендикулярные одной плоскости ,,,,,,
- Что такое перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость?
- Расстояние от точки до плоскости – это …
- Что такое наклонная? Что такое проекция наклонной?
- Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
- Какие плоскости называются перпендикулярными?
- Признак перпендикулярности плоскостей.
- **Что называется расстоянием между скрещивающимися прямыми?**