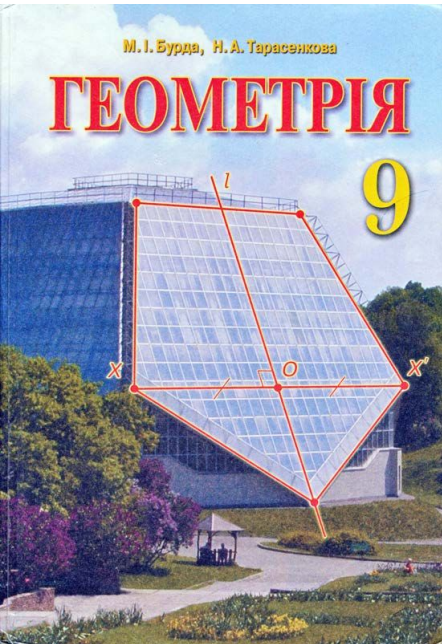




Геометрія

9А , 9В класи

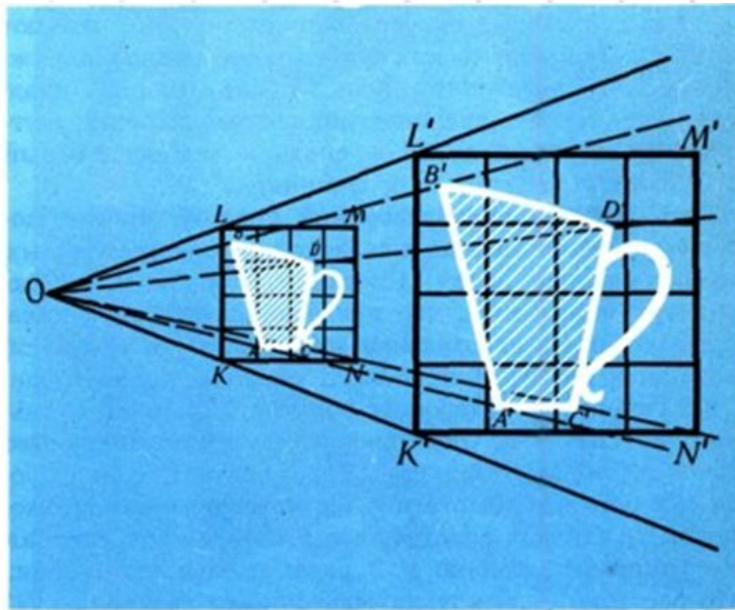
вчитель Тарасенко О.
М.

Розділ 4. Геометричні перетворення



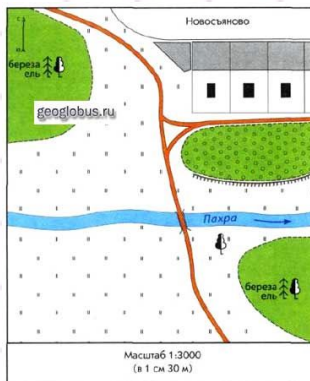
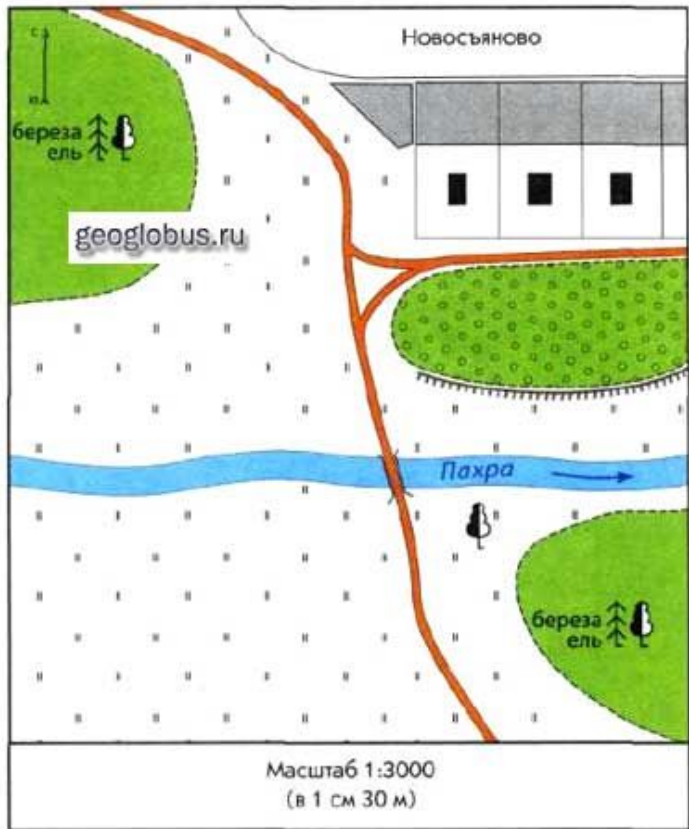
Тема уроку:

Перетворення подібності. Гомотетія



Поняття перетворення подібності

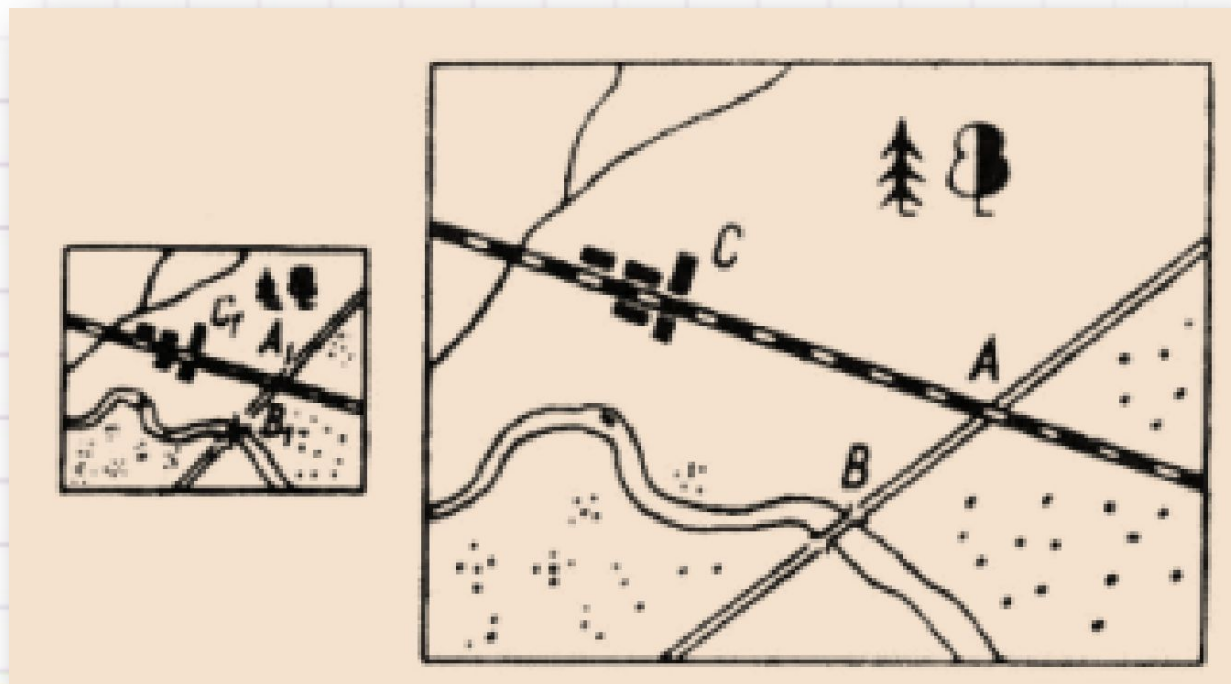
Один план місцевості
отримали з іншого
“перетворенням подібності”



- Подивіться на малюнок.

З одного плану ділянки місцевості виготовили інший. При цьому відношення відстаней між відповідними парами точок на планах рівні і дорівнюють 2,5 (відношенню масштабів): $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \dots = 2,5$.

Можна сказати, що один план отримали з іншого перетворенням подібності.

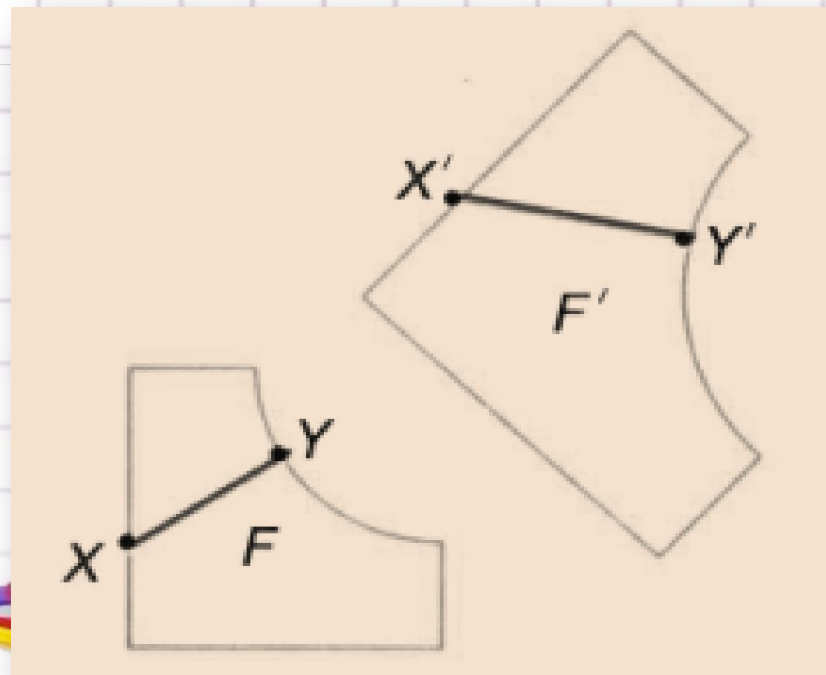


Перетворення подібності

- Перетворення, що переводить фігуру F у фігуру F' , при якому відстані між відповідними точками змінюються в тому самому відношенні $k > 0$, називається перетворенням подібності, або подібністю.

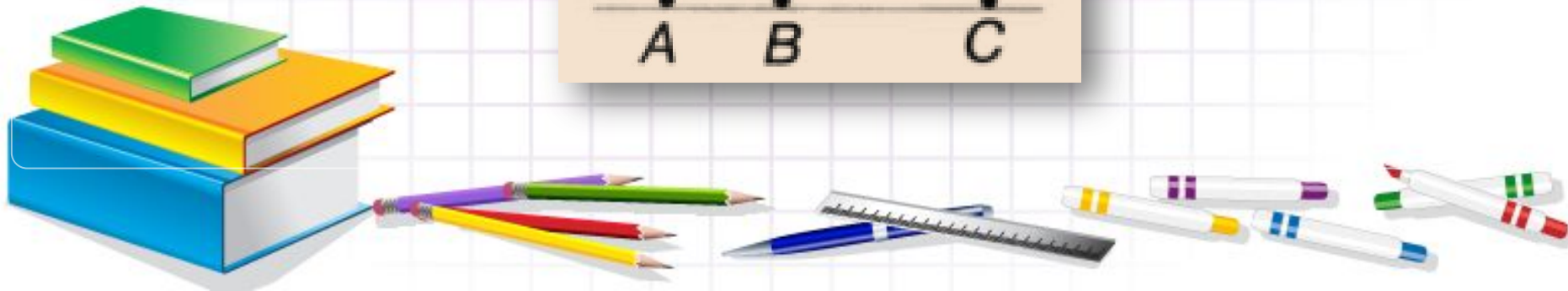
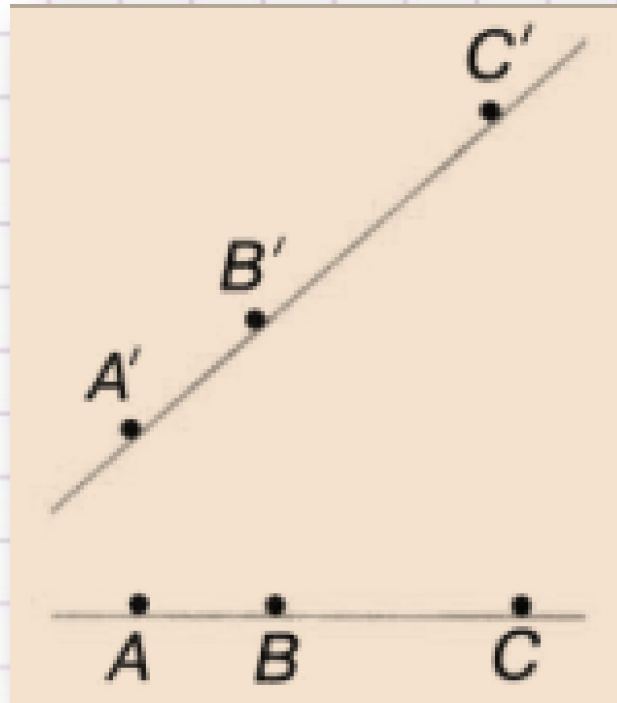
Це означає, що коли довільні точки X і Y фігури F при перетворенні подібності переходять у точки X' і Y' фігури F' , то $X'Y' = k * XY$, де $k > 0$.

Число k називається коефіцієнтом подібності.



Властивість перетворення подібності

Теорема. При перетворенні подібності точки, що лежать на прямій, переходять у точки, що лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.



Властивість перетворення подібності

Доведення.

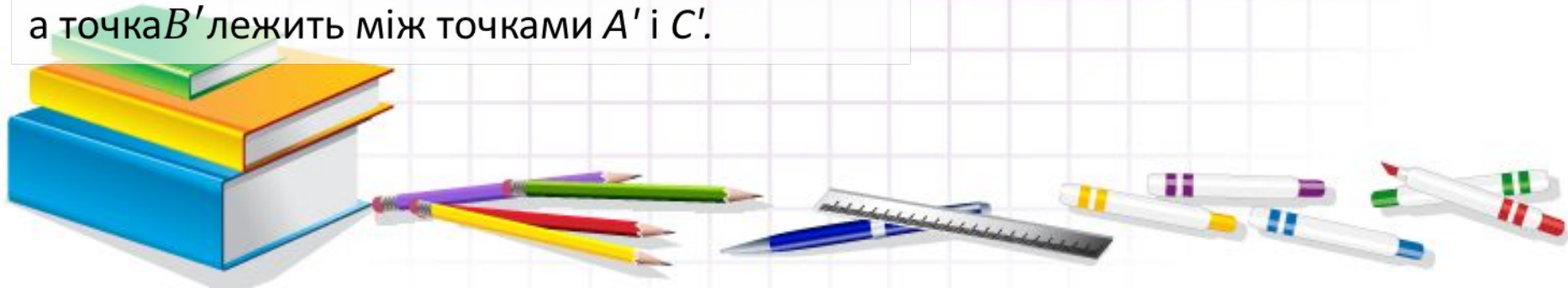
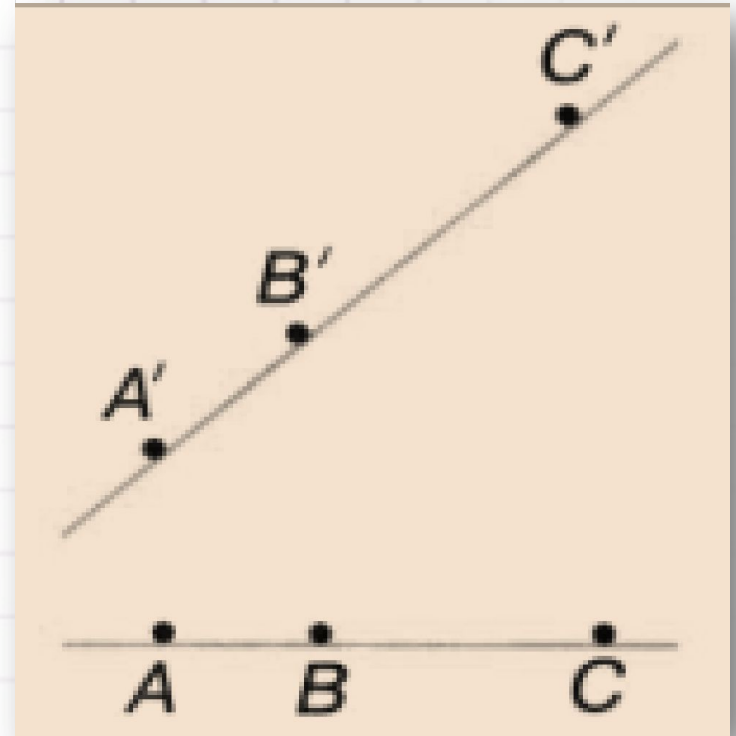
Нехай точки A , B і C лежать на одній прямій і точка B лежить між точками A і C .

Тоді $AC = AB + BC$. Деяке перетворення подібності переводить точки A , B , C у точки A' , B' , C' .

За означенням перетворення подібності, маємо:

$$A'C' = k \cdot AC = k \cdot (AB + BC) = k \cdot AB + k \cdot BC = A'B' + B'C'.$$

З рівності $A'C' = A'B' + B'C'$ випливає, що точки A' , B' , C' лежать на одній прямій, а точка B' лежить між точками A' і C' .



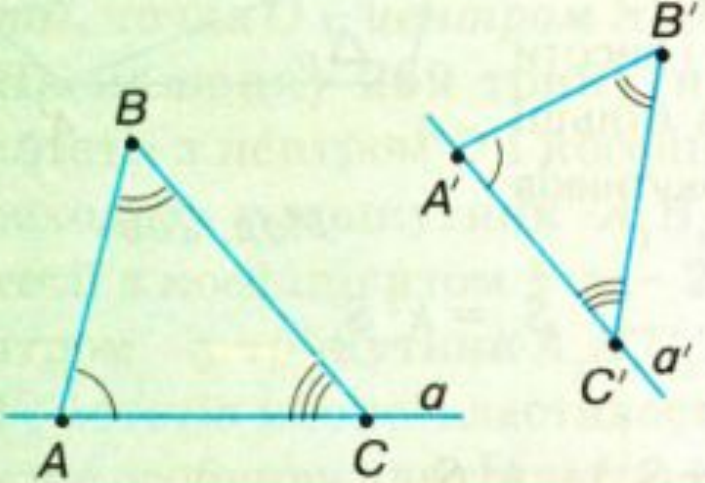
Властивість перетворення подібності

Наслідок. Перетворення подібності прямі переводить у прямі, промені – у промені, відрізки – у відрізки.

Перетворення подібності кут переводить у рівний йому кут



Властивість перетворення подібності

Перетворення подібності	Властивості
	1. Пряма переходить у пряму (a в a'), промінь — у промінь. 2. Відрізок переходить у відрізок (AB у $A'B'$, BC у $B'C'$, AC у $A'C'$). 3. Кут переходить у рівний йому кут ($\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$).

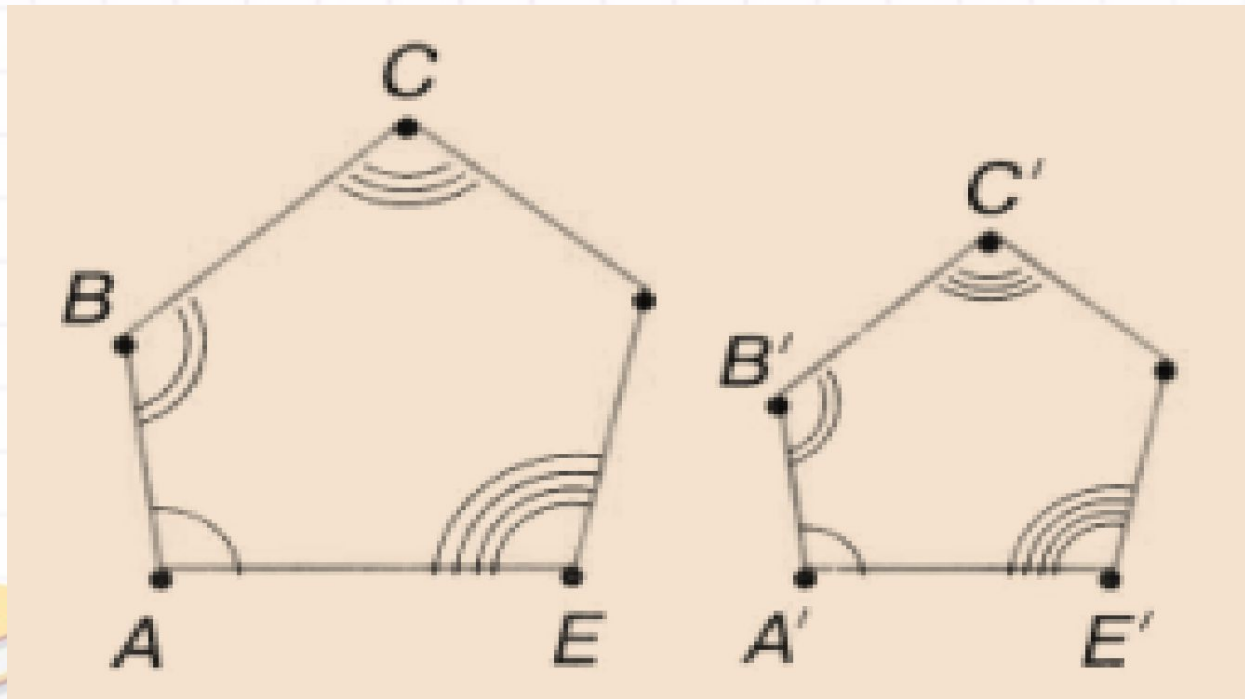


Подібні фігури

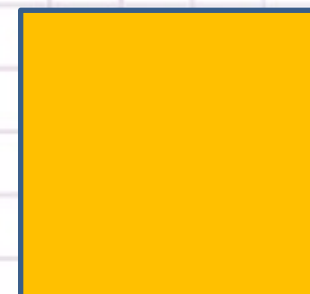
- Дві фігури називаються подібними, якщо вони переводяться одна в одну перетворенням подібності.

Якщо фігура F подібна фігурі F' , то записують $F \sim F'$.

З властивостей перетворення подібності випливає, що у подібних фігур відповідні кути рівні, а відповідні відрізки - пропорційні.



Приклади подібних фігур



Відношення площ подібних багатокутників

Теорема. Відношення площ подібних багатокутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності.

Коефіцієнт подібності k дорівнює відношенню довжин відповідних елементів подібних фігур.



Дано: F і F' — подібні багатокутники з коефіцієнтом подібності k (мал. 266)

Довести: $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

Доведення. Розіб'ємо багатокутник F на трикутники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ (мал. 266). Оскільки багатокутники F і F' подібні, то існує перетворення подібності, яке переводить багатокутник F у багатокутник F' , а трикутники розбиття багатокутника F у трикутники $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$ відповідного розбиття багатокутника F' . Площа багатокутника F дорівнює сумі площ трикутників $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$, а площа багатокутника F' дорівнює сумі площ трикутників $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_n$. Якщо коефіцієнт подібності k , то сторони і висоти трикутників багатокутника F' у k разів більші (мал. 266) за відповідні сторони і висоти трикутників багатокутника F .

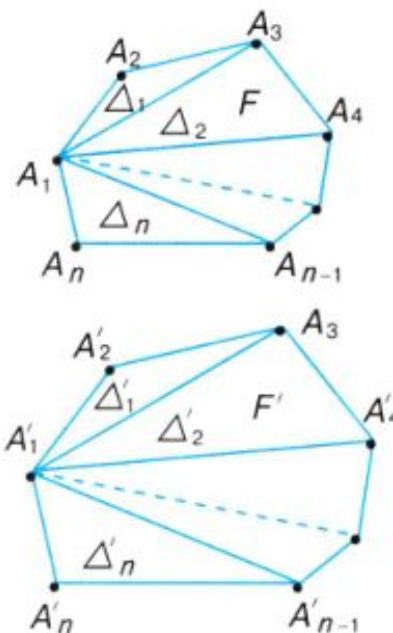
Звідси випливає: $S_{\Delta'_1} = k^2 S_{\Delta_1}, S_{\Delta'_2} = k^2 S_{\Delta_2}, \dots, S_{\Delta'_n} = k^2 S_{\Delta_n}$.

Додавши ці рівності почленно, дістанемо:

$$S_{F'} = S_{\Delta'_1} + S_{\Delta'_2} + \dots + S_{\Delta'_n} = k^2 (S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} + \dots + S_{\Delta_n}) = k^2 S_F.$$

Звідки $\frac{S_{F'}}{S_F} = k^2$.

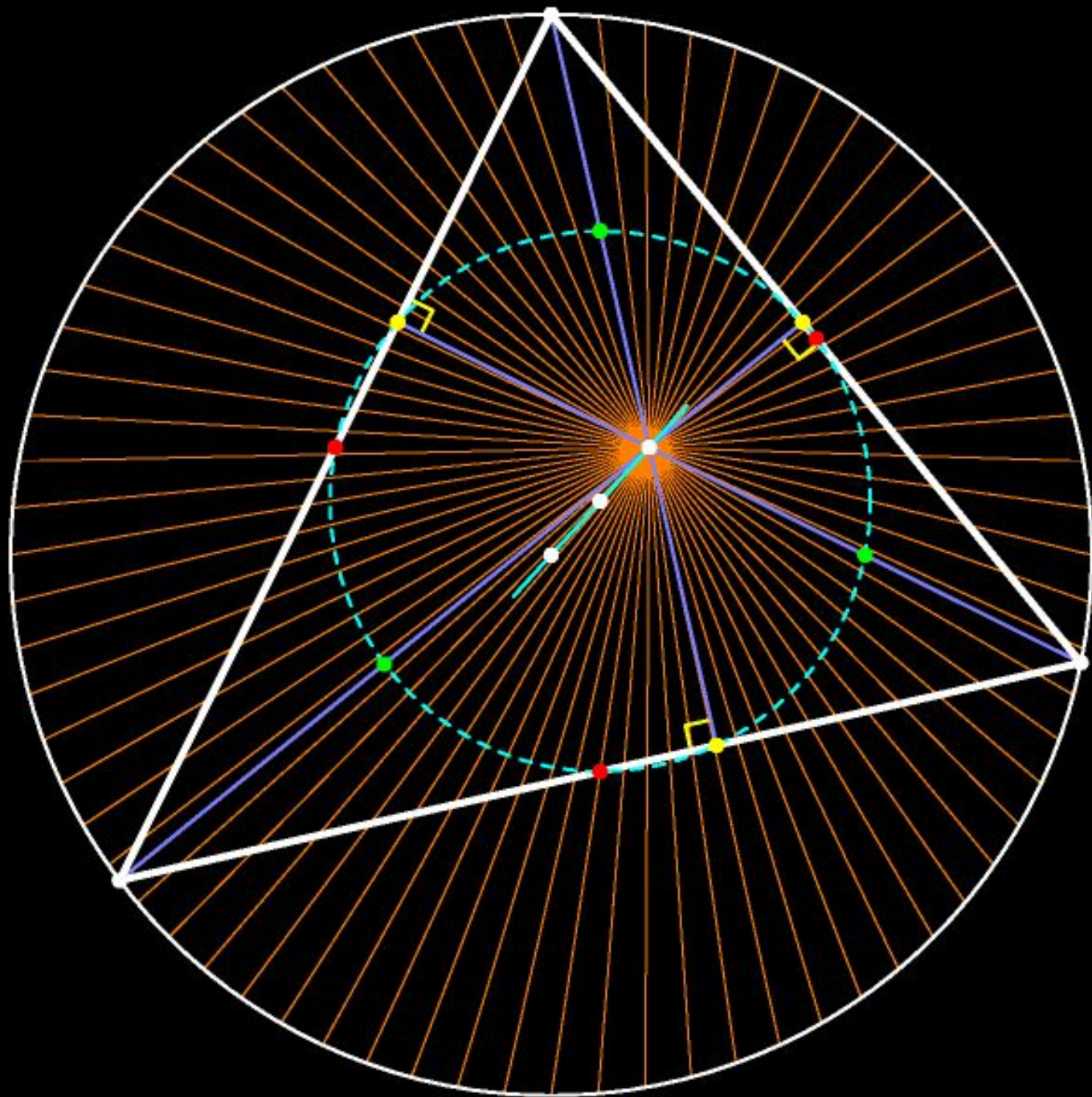
Цей факт справджується для будь-яких фігур.

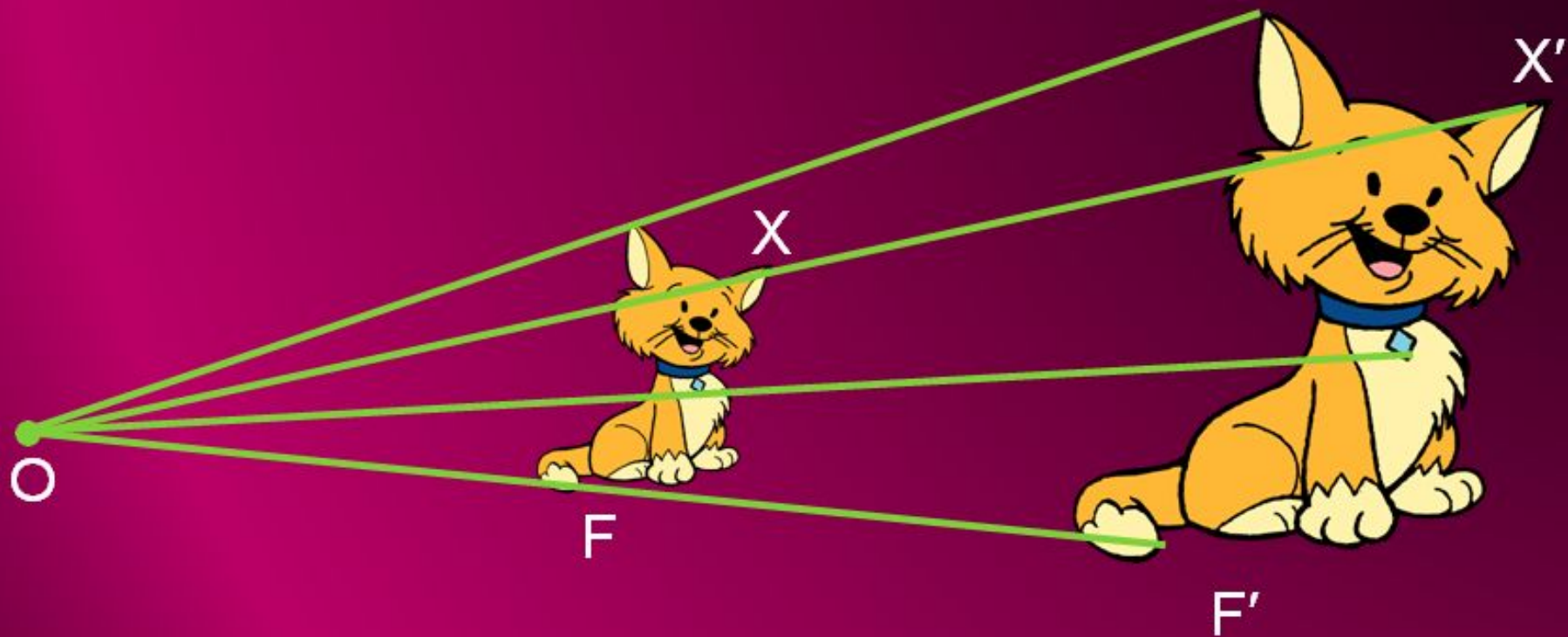


Мал. 266

ГОМОТЕТІЯ





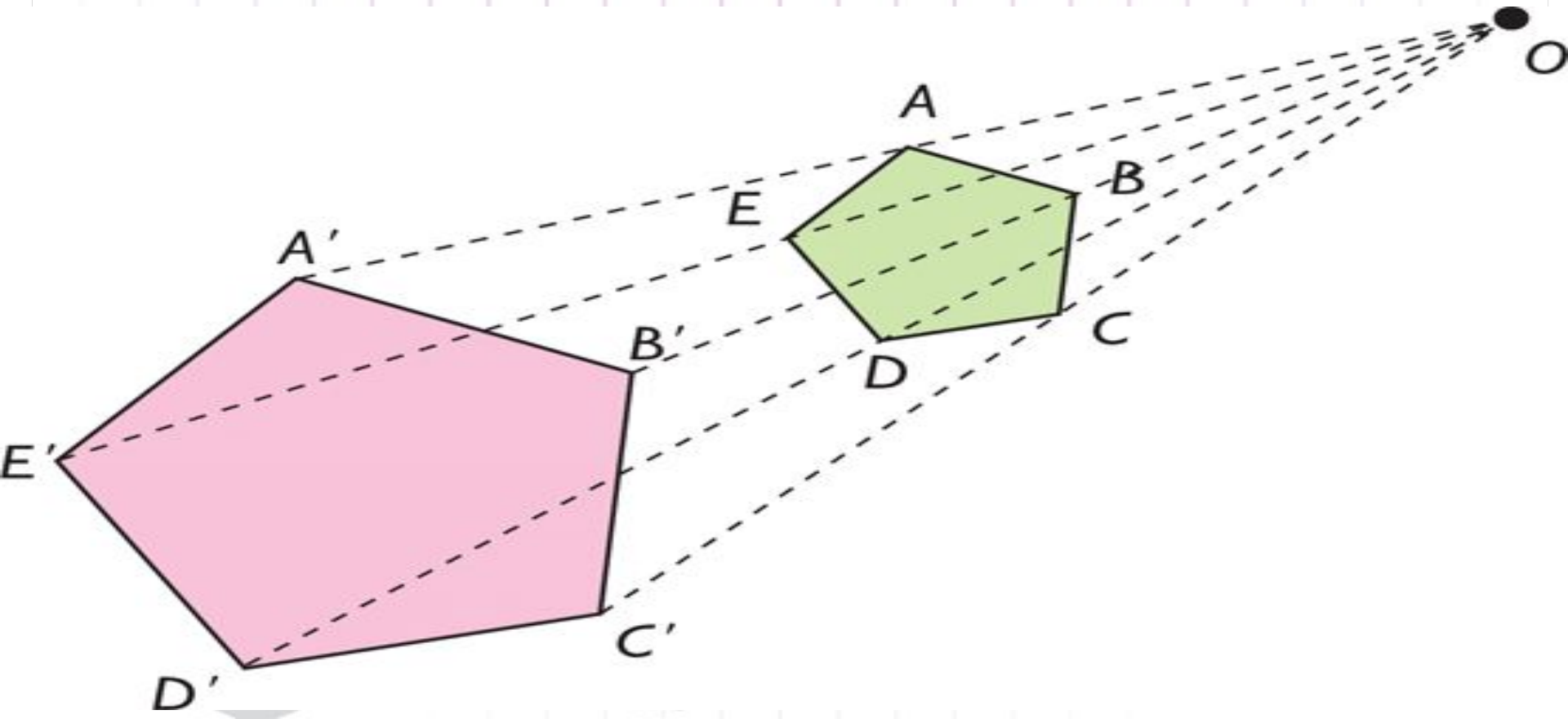


Гомотетія

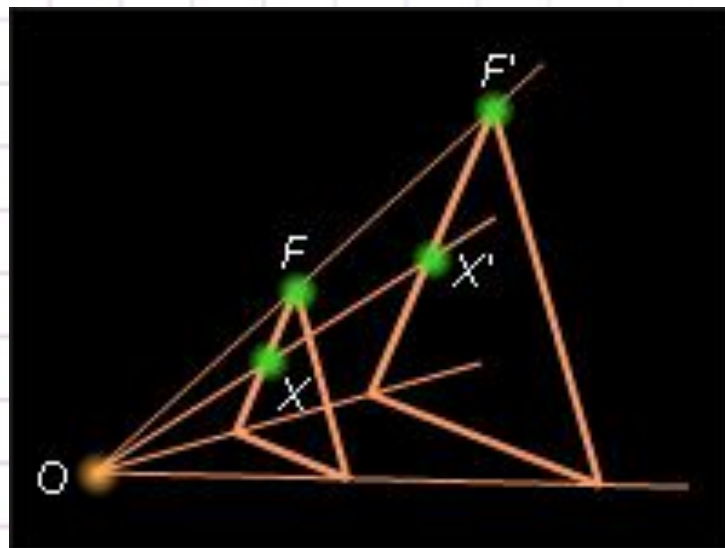
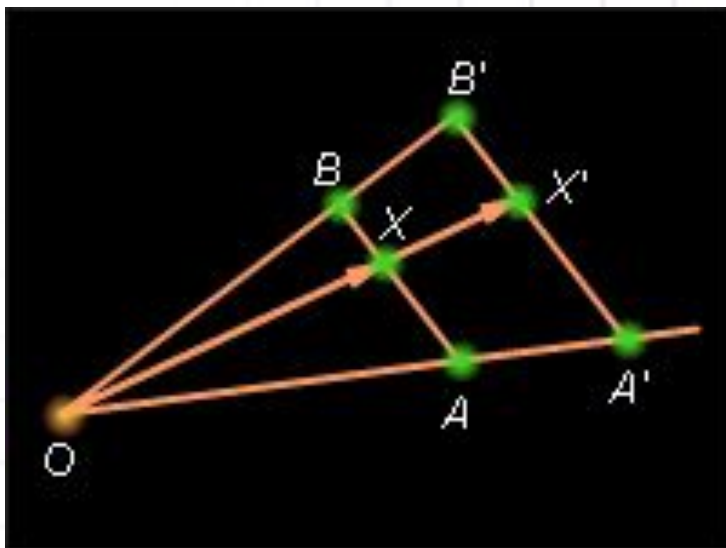
- Побудуємо подібні фігури.

Нехай F – дана фігура ($ABCDE$). Позначимо довільну точку O . Через кожну точку фігури F проведемо промені OA , OB , OC , OD , OE та відкладемо на них відрізки $k \cdot OA$, ..., $k \cdot OE$. Отримаємо шукану фігуру F' ($A'B'C'D'E'$).

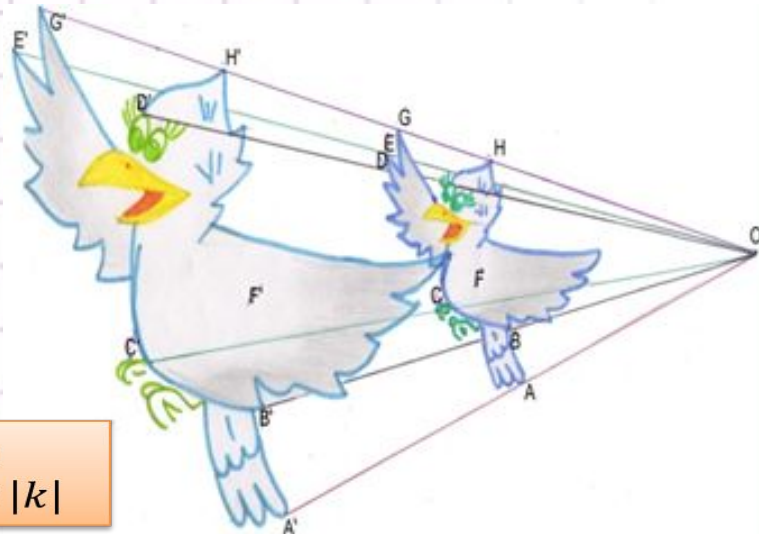
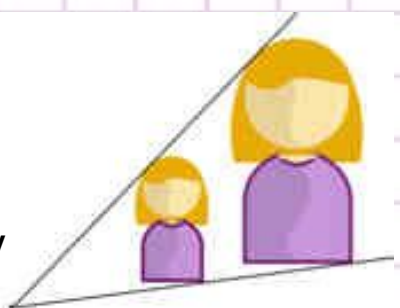
Фігури F і F' називають гомотетичними з коефіцієнтом гомотетії k і центром гомотетії у точці O .



Гомотетія



Гомотетія має всі властивості перетворення подібності. Крім того, вона ще має особливу властивість: гомотетія переводить пряму у паралельну їй пряму або у саму себе, якщо дана пряма проходить через центр гомотетії.

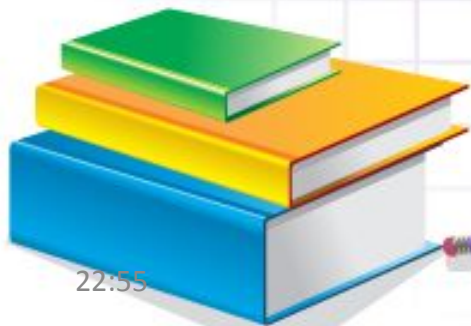
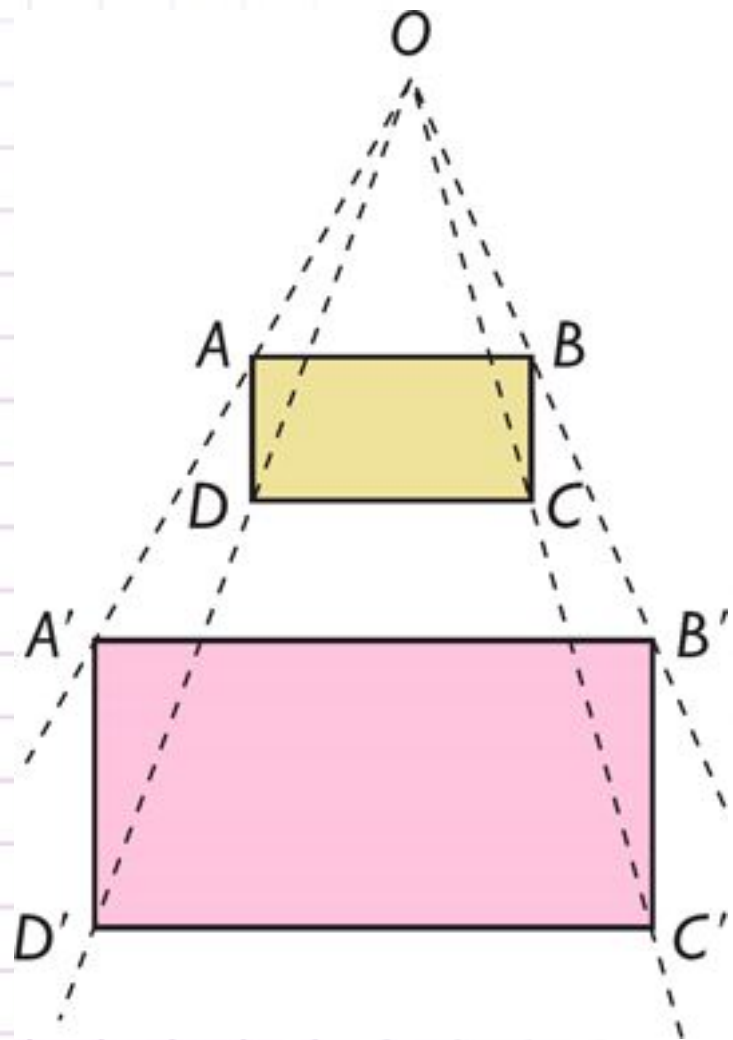


Гомотетія – перетворення подібності з коефіцієнтом $|k|$



Задача.

Сторони прямокутника $ABCD$ дорівнюють 8 см та 10 см. Коефіцієнт гомотетії дорівнює 2. Знайти площу подібного прямокутника $A'B'C'D'$.



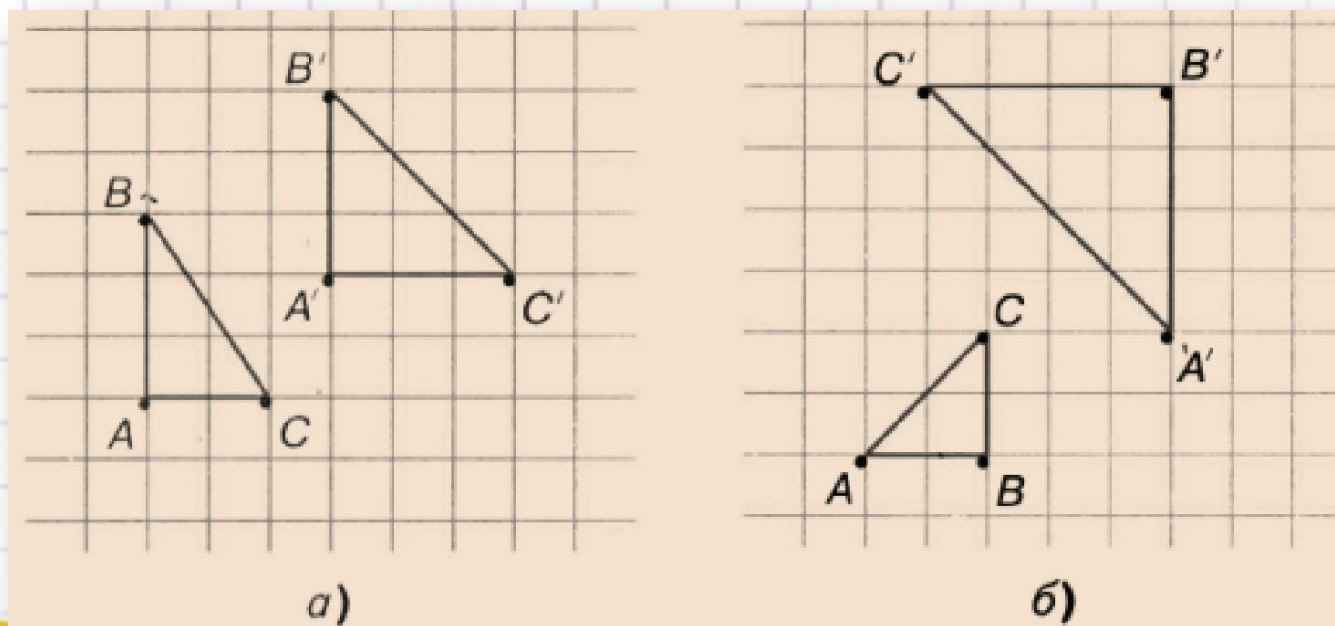
Повторення

- 1) Що таке перетворення подібності?
- 2) Як довести, що при перетворенні подібності точки, які лежать на прямій, переходять у точки, які теж лежать на прямій, і зберігається порядок їх взаємного розміщення.
- 3) У які фігури переходять прямі, промені, відрізки, кути під час перетворення подібності?
- 4) Які дві фігури називаються подібними? Наведіть приклад подібних фігур.
- 5) Що таке гомотетія?
- 6) Що таке центр гомотетії? Коефіцієнт гомотетії?
- 7) Назвіть властивості гомотетії.



Усні вправи

687. На якому з малюнків а) — б) зображено перетворення подібності, що переводить трикутник ABC у трикутник $A'B'C'$?



Усні вправи

690. За якої умови дві подібні фігури рівні?

691. Побудуйте які-небудь дві подібні, але не рівні фігури.

692. Чи достатньо лише рівності відповідних кутів двох багатокутників або лише пропорційності відповідних сторін, щоб ці багатокутники були подібними?

693. Чи будуть подібними:

- 1) два будь-яких квадрати;
- 2) два будь-яких прямокутники;
- 3) два будь-яких кола?

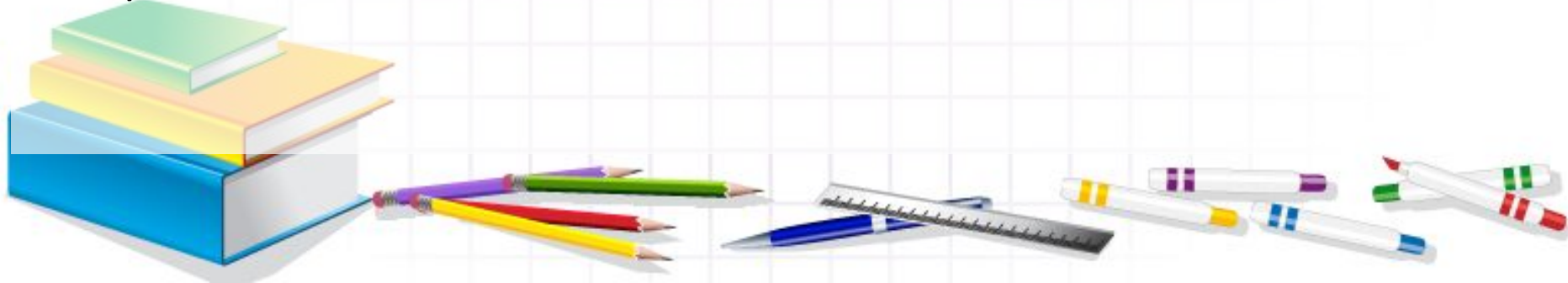


Тренувальні вправи

694. Чому дорівнює відношення площ двох подібних багатокутників, якщо коефіцієнт їх подібності дорівнює: 1) 0,5; 2) 2; 3) 5?

695. Позначте точки O і X . Побудуйте точку X' , в яку переходить точка X при гомотетії з центром O і коефіцієнтом: 1) $k=3$; 2) $k = -3$; 3) $k=1/2$.

696. Гомотетія точку X переводить у точку X' . Побудуйте центр гомотетії, якщо коефіцієнт гомотетії дорівнює: 1) 4; 2) -2; 3) 0,5.



Тренувальні вправи

697. Позначте точки O і A . Побудуйте точку A' так, щоб:

1) $OA' = 3OA$; 2) $OA' = -2OA$; 3) $OA' = \frac{1}{3}OA$.

698. Гомотетія з центром O точку A переводить у точку A' . Як розміщені точки A і A' відносно центра гомотетії, якщо:

1) $k > 0$; 2) $k < 0$; 3) $k > 1$?

699. Чи подібні два ромби, якщо:

- 1) кут одного ромба дорівнює 45° , а кут другого — 135° ;
- 2) у кожного з них сторона дорівнює меншій діагоналі?



Домашнє завдання

- Опрацювати п. 21
- Виконати тренувальні вправи



Підсумок уроку

- ✓ З якими новими поняттями ми сьогодні познайомилися?
- ✓ Чого ми навчилися на уроці?
- ✓ Що для вас залишилося не зрозумілим?
- ✓ Чи комфортно вам було працювати на уроці?
- ✓ Ви йдете з уроку задоволені собою?

