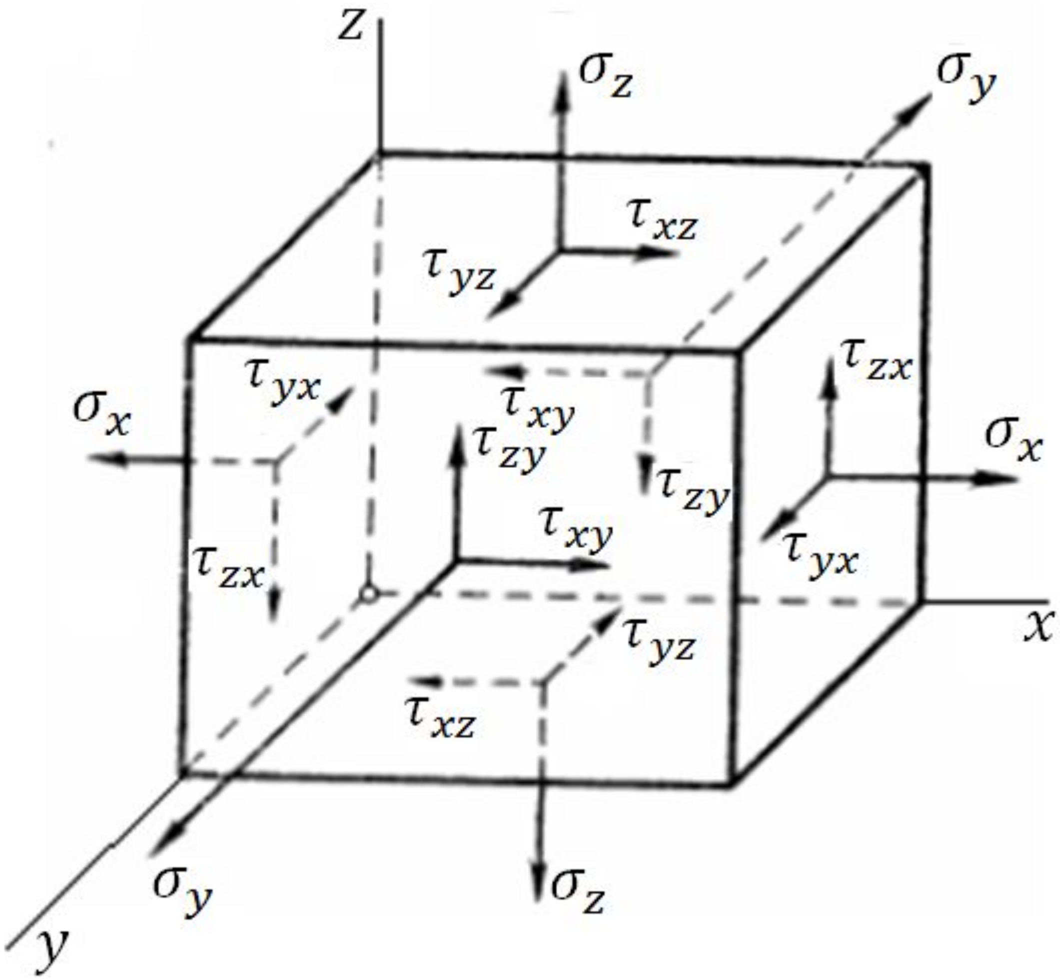
Основы прикладной теории упругости

Напряженное состояние в точке



Напряженное состояние в точке

Правила знаков

1. **Нормальные растягивающие напряжения считаются положительными, сжимающие – отрицательными.**
2. **За положительные составляющих касательных напряжений принимают положительные направления осей координат, если направление растягивающих нормальных напряжений по той же площадке совпадает с положительным направлением соответствующей оси координат.**

Тензор напряжений

$$T_H = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Закон парности касательных напряжений

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \qquad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \qquad \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

На двух взаимно-перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярных общему ребру, равны и направлены обе либо к ребру, либо от ребра.

Главные напряжения

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma^3 - J_1\sigma^2 + J_2\sigma - J_3 = 0$$

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z;$$

$$J_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2;$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}$$

Инварианты тензора напряжений

$$\sigma^3 - \sigma^I\sigma^2 + \sigma^{II}\sigma - \sigma^{III} = 0$$

$$\sigma^I = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = const\,;$$

$$\sigma^{II} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 = const\,;$$

$$\sigma^{III} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = const$$

Контроль правильности определения главных напряжений

$$\sigma^I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\,;$$

$$\sigma^{II} = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3\,;$$

$$\sigma^{III} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

Деформированное состояние в точке

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$$

$$T_Д = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{xz}}{2} \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \qquad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

Главные деформации

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \dfrac{\gamma_{xz}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y - \varepsilon & \dfrac{\gamma_{yz}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{zx}}{2} & \dfrac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z - \varepsilon \end{vmatrix} = 0$$

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3$$

$$J_1 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\,; \qquad J_2 = \varepsilon_x\varepsilon_y + \varepsilon_y\varepsilon_z + \varepsilon_x\varepsilon_z - \frac{1}{4}\left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{xz}^2\right);$$

$$J_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \dfrac{\gamma_{xy}}{2} & \dfrac{\gamma_{xz}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_y & \dfrac{\gamma_{yz}}{2} \\ \dfrac{\gamma_{zx}}{2} & \dfrac{\gamma_{zy}}{2} & \varepsilon_z \end{vmatrix}$$

Объемная деформация

dx, dy, dz – размеры параллелепипеда

Размеры параллелепипеда после деформации

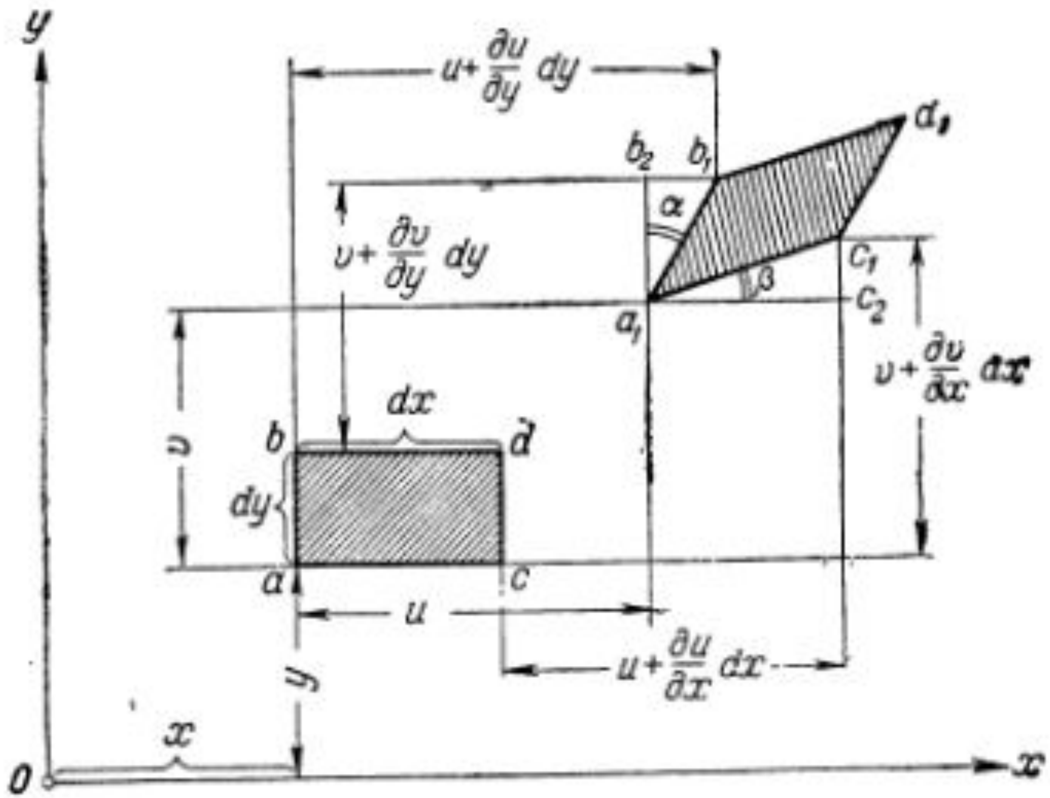
$$(1+\varepsilon_x)dx, (1+\varepsilon_y)dy, (1+\varepsilon_z)dz$$

$$\theta = \frac{\Delta V}{V}$$

Уравнения связи деформаций и перемещений в декартовой системе координат

Одна из проекций параллелепипеда

до деформации и после деформации



Уравнения Коши (геометрические уравнения)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Уравнения неразрывности деформаций

Зависимости между составляющими деформаций в одной плоскости

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}.$$

Уравнения неразрывности деформаций

Зависимости между составляющими деформаций в разных плоскостях

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z}.$$

Уравнения неразрывности деформаций

Все 6 компонентов деформаций произвольно задавать нельзя. Между ними существуют зависимости, приведенные выше.

<u>Физический смысл уравнений</u>

Если, задаваясь деформациями, не учитывать уравнения неразрывности деформаций, и для каждого параллелепипеда, на которые мысленно разбито тело, назначить 6 независимых составляющих деформаций, то из отдельных таких деформированных параллелепипедов нельзя собрать непрерывного деформированного тела.

Тело, сплошное и непрерывное до деформации остается сплошным и непрерывным после деформации

Обобщенный закон Гука

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

Обобщенный закон Гука

$$\sigma_x = 2G\left(\varepsilon_x + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right); \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y = 2G\left(\varepsilon_y + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right); \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz};$$

$$\sigma_z = 2G\left(\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\theta\right); \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}.$$

Обобщенный закон Гука

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta\,; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}\,;$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta\,; \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}\,;$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta\,; \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}\,;$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{1-2\mu}G \text{ – постоянная Ляме.}$$

Основные гипотезы предельных состояний

Предельное НС – НС, при котором происходит качественное изменение свойств материала – переход от одного механического состояния в другое:

- **пластический материал – возникновение заметных остаточных деформаций;**
- **хрупкий материал – начало разрушения материала.**

Предельное НС может рассматриваться как характеристика свойств материала.

Трудность создания теории предельных состояний – недостаточность наших представлений о внутренних процессах, происходящих в материале.

Задача решается в основном путем анализа и обобщения экспериментальных данных.

2 направления в ТПС

- **на основе гипотез;**
- **феноменологический подход (применяется при описании явлений, детальный механизм которых недостаточно ясен: физика – закон всемирного тяготения; геология – при описании закономерностей расположения залежей полезных ископаемых).**

Коэффициент запаса прочности

Под коэффициентом запаса понимается число, показывающее, во сколько раз следует увеличить все компоненты НС, чтобы оно стало предельным.

Если в двух НС коэффициенты запаса равны, то такие НС называются равноопасными.

$$k = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{экв}};$$

При растяжении $\sigma_{пред} = \sigma_T;$ $\sigma_{пред} = \sigma_B;$

При сжатии $\sigma_{пред} = \sigma_{кр}$

1. Гипотеза наибольшего нормального напряжения

В качестве критерия прочности берется величина наибольшего нормального напряжения σ_1.
Два других главных не учитываются.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1$$

2. Гипотеза наибольших линейных деформаций

Отрыв материала по плоскости можно рассматривать как результат нарушений межмолекулярных сил сцепления вследствие увеличения расстояния между молекулами.

Была выдвинута гипотеза использовать в качестве ПС наибольшую линейную деформацию.

Эта гипотеза получила довольно широкое распространение, однако детальная проверка обнаружила в ней ряд существенных недостатков.

3. Гипотеза максимальных касательных напряжений

Образование остаточных деформаций в металлах происходит сдвигом частиц друг относительно друга.

Поэтому критерием перехода от упругого состояния в пластическое являются наибольшие касательные напряжения в точке.

Это означает, что пластические деформации начинают образовываться тогда, когда максимальные касательные напряжения достигают некоторого предельного значения

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}; \quad \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_{экв}}{2}; \quad \sigma_{экв} = \sigma_1 - \sigma_3 .$$

Пластичные материалы – удовлетворительные результаты.

Недостатки – для материалов, имеющих различные механические характеристики на растяжение и сжатие.

4. Гипотеза энергии формоизменения

Внутренняя потенциальная энергия = энергия изменения объема + энергия формоизменения.

В основе перехода из упругого состояния в пластическое учитывается только энергия формоизменения.

$$U_{ф} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2\right]$$

$$U_{ф} = \frac{1+\mu}{6E} 2\sigma^2$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}$$

$$\sigma_{экв} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2\right)}$$

4. Гипотеза энергии формоизменения

Гипотеза применима к оценке ПС пластичных материалов и дает результаты менее удовлетворительные для материалов, неодинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию.

Гипотезы 3 и 4 являются основными гипотезами ПС и сохраняют свое значение до настоящего времени.

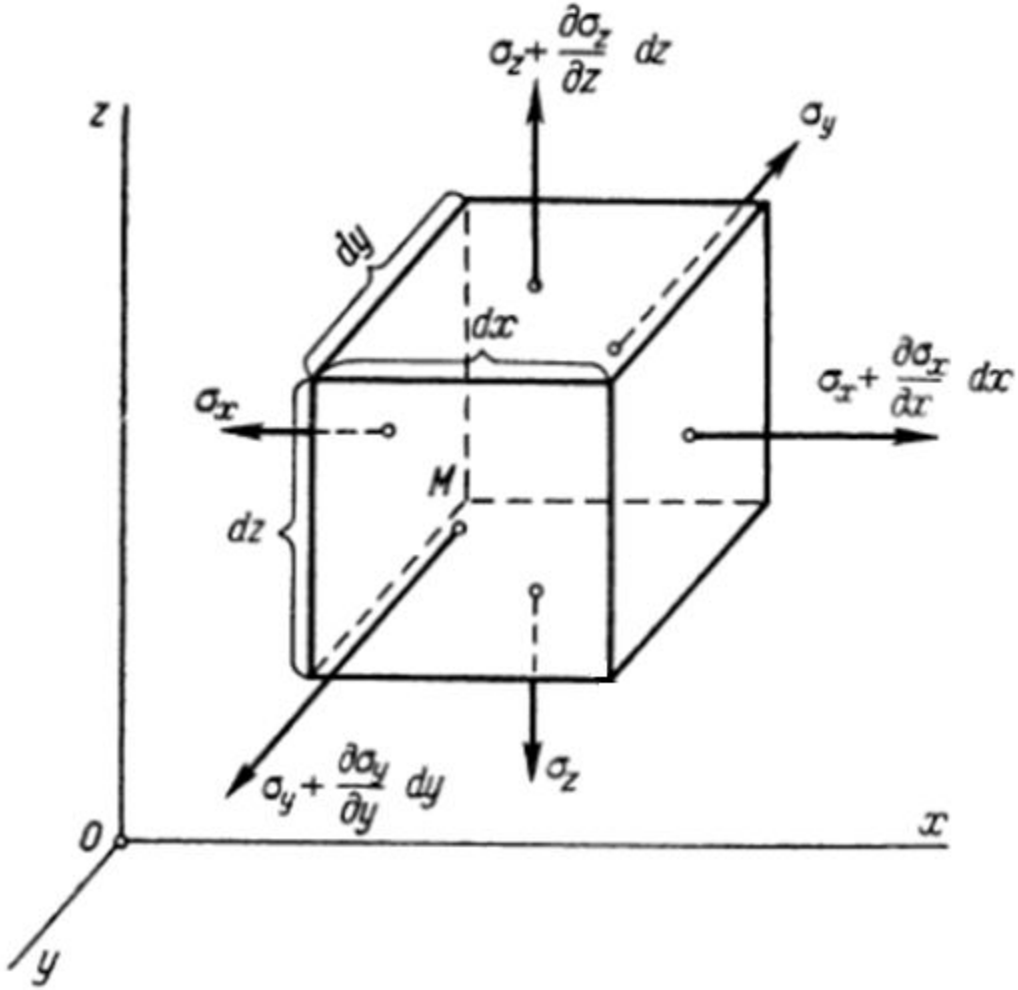
Теория прочности Мора

Общепризнанной в настоящее время является теория прочности Мора

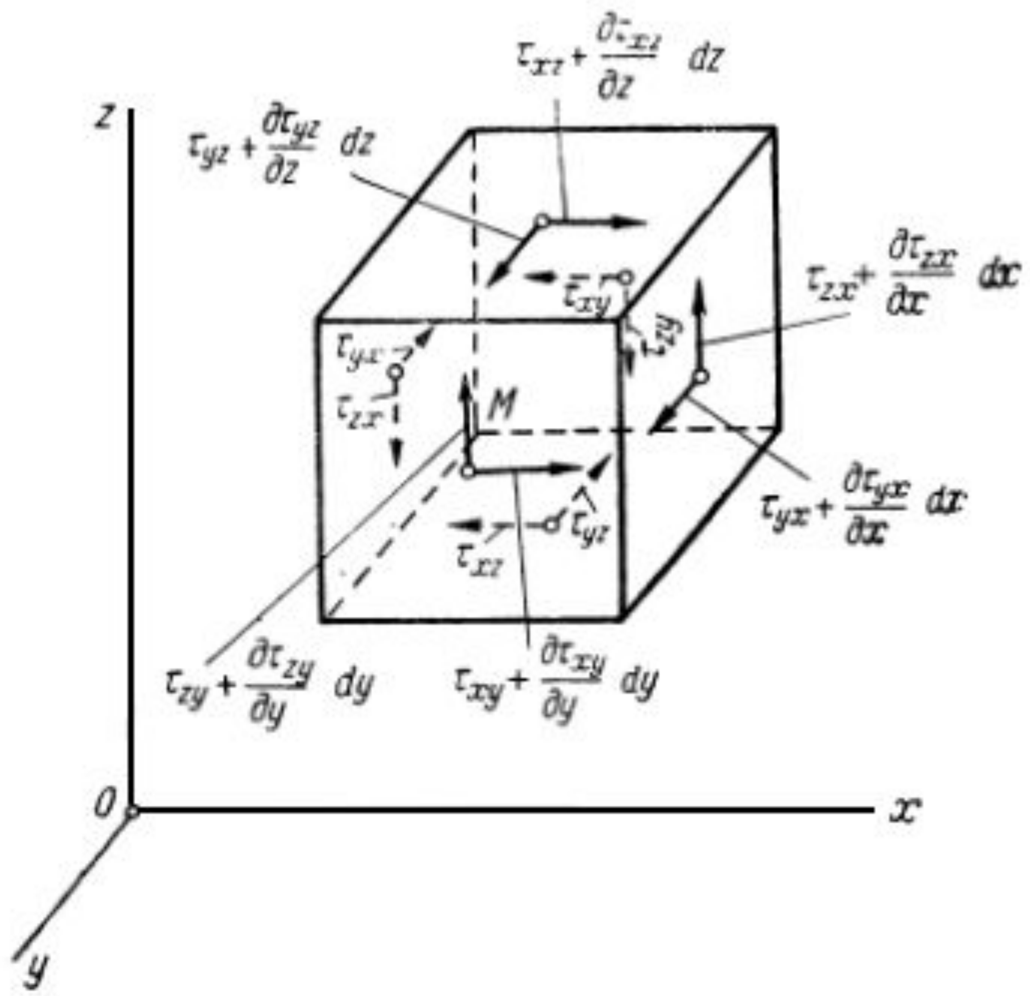
$$\sigma_{экв} = \sigma_1 - k\sigma_3$$

$$k = \frac{\sigma_{TP}}{\sigma_{TC}}; \qquad k = \frac{\sigma_{BP}}{\sigma_{BC}}$$

Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат



Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат



Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат

$$\left[\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right] dydz - \sigma_x dydz +$$

$$+\left[\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right] dxdz - \tau_{xy} dxdz +$$

$$+\left[\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right] dxdy - \tau_{xz} dxdy +$$

$$+ X\rho dxdydz = \rho dxdydz \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

***X* – проекция на ось *x* объемной силы, отнесенной к единице массы**

Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Дифференциальные уравнения равновесия в декартовой системе координат

Статические уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0\ ;$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0\ .$$

Формулировка линейной задачи теории упругости

Статические (или динамические) уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Формулировка линейной задачи теории упругости

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Формулировка линейной задачи теории упругости

Физические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G};$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G};$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}.$$

Запись основных соотношений теории упругости в цилиндрической системе координат (осесимметричная задача)

r, θ, z – цилиндрические координаты;

u, w – перемещения.

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \qquad \gamma_{rz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z};$$

Запись основных соотношений теории упругости в цилиндрической системе координат (осесимметричная задача)

Физические соотношения:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right];$$

$$\gamma_{rz} = \frac{\tau_{rz}}{G}$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \mu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right];$$

Запись основных соотношений теории упругости в цилиндрической системе координат (осесимметричная задача)

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho F_r = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2};$$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} + \rho F_z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Математические модели решения задач теории упругости

1. **Одномерные модели**
   - **Растяжение/сжатие, чистый сдвиг, кручение**
2. **Плоские модели**
   - **плоское напряженное состояние;**
   - **плоское деформированное состояние;**
   - **обобщенная плоская деформация.**
3. **Осесимметричная модель**
4. **Плоские осесимметричные модели**
   - **осесимметричное ПНС;**
   - **осесимметричное ПДС.**
5. **Трехмерная модель**

Методы решения линейной задачи теории упругости

1. Метод перемещений
   - из уравнений обобщенного закона Гука выразить напряжения через деформации;
   - выразить напряжения через перемещения, используя геометрические соотношения;
   - подставить эти соотношения в уравнения равновесия.

2. Метод сил: основные неизвестные – напряжения.
3. Смешанный метод: за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений.

Метод перемещений

$$\sigma_x = 2G\varepsilon_x + \lambda\theta; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy};$$

$$\sigma_y = 2G\varepsilon_y + \lambda\theta; \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz};$$

$$\sigma_z = 2G\varepsilon_z + \lambda\theta; \qquad \tau_{xz} = G\gamma_{xz};$$

$$\lambda = \frac{2\mu}{1-2\mu}G \text{ – постоянная Ляме.}$$

Уравнения Коши (геометрические уравнения)

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y};$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Метод сил (модель ПНС)

Уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0\,;$$

Геометрические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Метод сил (модель ПНС)

Физические уравнения

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right);$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\,.$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right);$$

Метод сил (модель ПНС)

Используем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sigma_x - \mu \sigma_y\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sigma_y - \mu \sigma_x\right) = 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}$$

Метод сил (модель ПНС)

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} = 0\,;$$

$$2\frac{\partial^2 \tau_{yx}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}$$

Метод сил (модель ПНС)

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}=-(1+\mu)\left[\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right]$$

Уравнение Леви

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)+\frac{\partial}{\partial y^2}\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0$$

$$\nabla^2\left(\sigma_x+\sigma_y\right)=0 \qquad \nabla^2=\left(\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial y^2}\right)$$

Метод сил (модель ПНС)

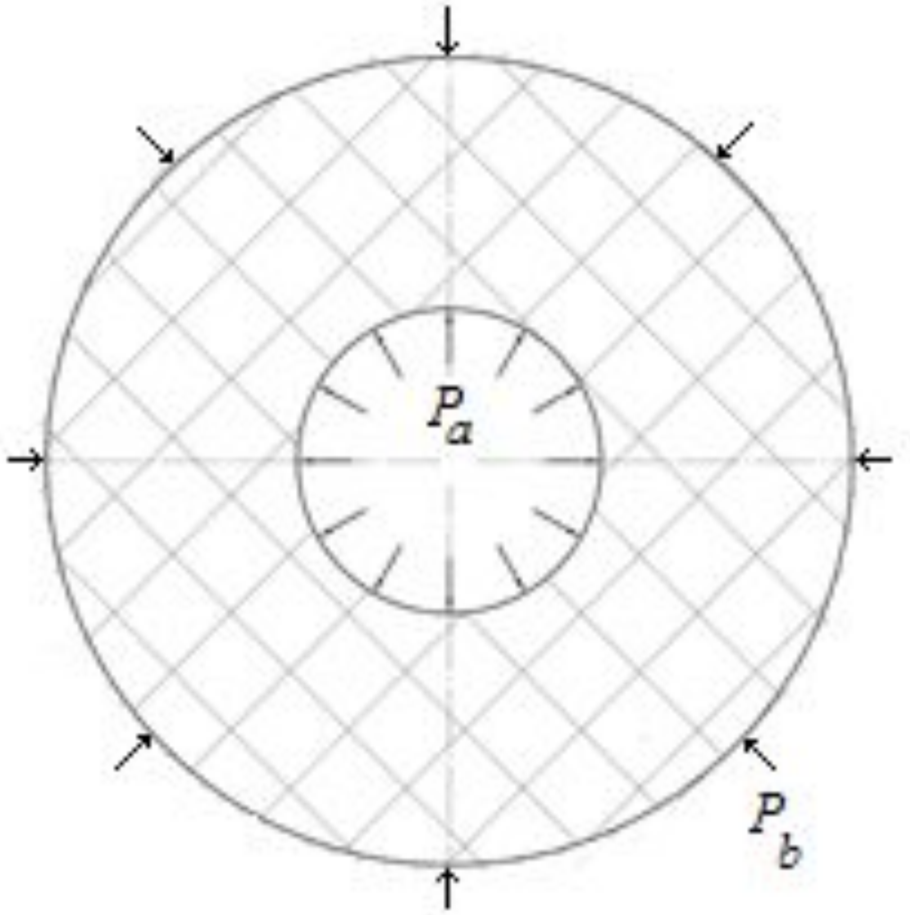
Система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0\,;$$

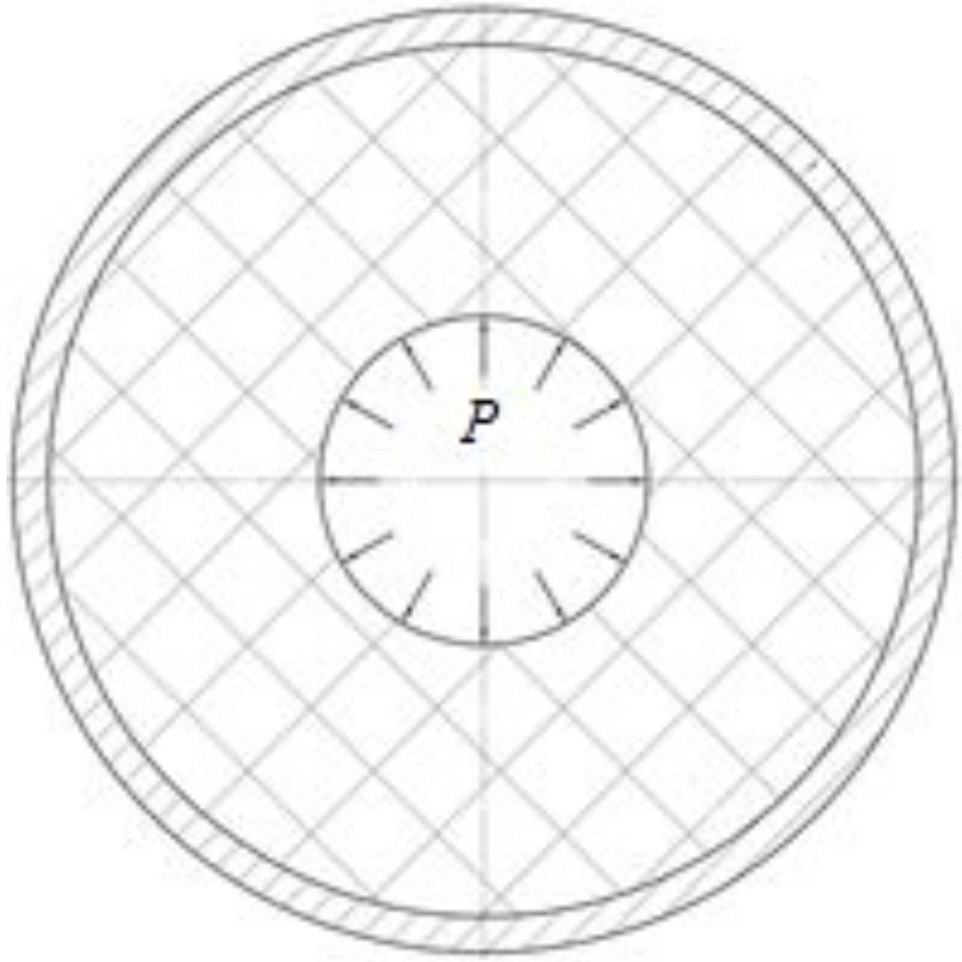
$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{y}}{\partial y} = 0\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 0$$

Задача Ламе



НДС прочноскрепленного заряда при действии внутреннего давления



Благодарю
за внимание!