



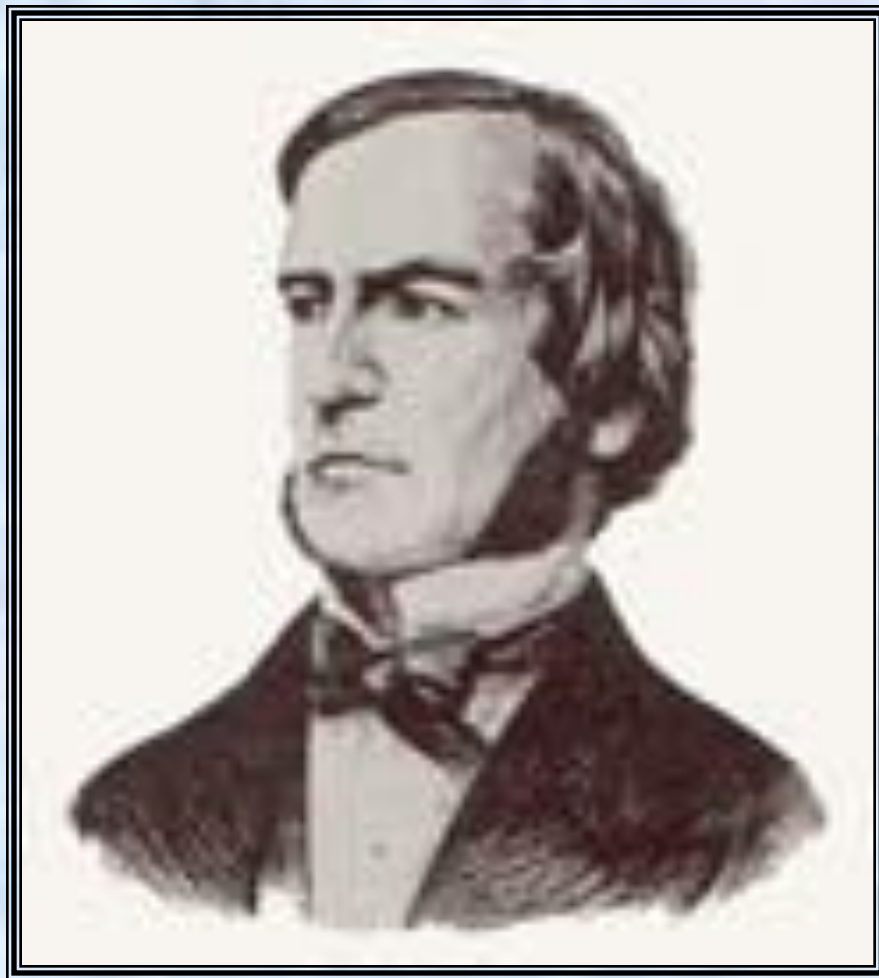
ОСНОВЫ ЛОГИКИ





Алгебра логики (*булева алгебра*) -
это раздел математики, изучающий
высказывания, рассматриваемые со
стороны их логических значений
(истинности или ложности) и
логических операций над ними.





Джордж Буль





Логическое высказывание — это любое повествовательное предложение, в отношении которого можно однозначно сказать, истинно оно или ложно.



Так, например, предложение
"*Трава зеленая*" следует считать
высказыванием, так как оно
истинное.

Предложение "*Лев - птица*" тоже
высказывание, так как оно ложное.



Не всякое предложение является
логическим высказыванием.

Высказываниями не являются,
например, предложения "ученик
десятого класса" и "информатика
— интересный предмет".

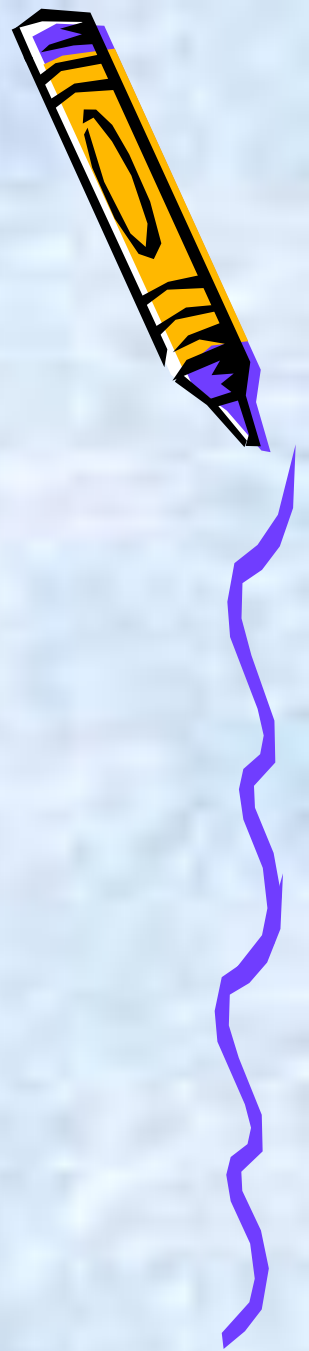




Употребляемые в обычной речи слова и словосочетания "не", "и", "или", "если... , то", "тогда и только тогда" и другие позволяют из уже заданных высказываний строить новые высказывания.

Такие слова и словосочетания называются логическими связками.





Высказывания, образованные из других высказываний с помощью логических связок, называются *составными.*

Высказывания, не являющиеся составными, называются *элементарными.*



Так, например, из элементарных высказываний "*Петров — врач*", "*Петров — шахматист*" при помощи связки "*и*" можно получить составное высказывание "*Петров — врач и шахматист*", понимаемое как "*Петров — врач, хорошо играющий в шахматы*".



При помощи связки "*или*" из этих же высказываний можно получить составное высказывание "*Петров — врач или шахматист*", понимаемое в алгебре логики как "*Петров или врач, или шахматист, или и врач и шахматист одновременно*".



Чтобы обращаться к логическим высказываниям, им назначают имена.

Пусть через **A** обозначено высказывание "*Тимур поедет летом на море*", а через **B** — высказывание "*Тимур летом отправится в горы*".



Тогда составное высказывание
*"Тимур летом побывает и на
море, и в горах"* можно кратко
записать как **А и В**. Здесь **"и"**
— логическая связка, **А, В** —
логические переменные, которые
могут принимать только два
значения - **"истина"** или **"ложь"**,
обозначаемые, соответственно,
"1" и **"0"**.



Операции над логическими высказываниями



НЕ

Операция, выражаемая словом "не", называется инверсией или *отрицанием* и обозначается чертой над высказыванием.





Высказывание $\bar{A}$ истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно.

*Пример. "Луна — спутник Земли" (A);
"Луна — не спутник Земли" ($\bar{A}$).*



И



Операция, выражаемая связкой "и", называется конъюнкцией (лат. conjunctio — соединение) или *логическим умножением* и обозначается точкой "·" (может также обозначаться знаками $\wedge$ или $\&$).



Высказывание $A \cdot B$ истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B истинны.

Например, высказывание " 10 делится на 2 и 5 больше 3 " истинно, а высказывания " 10 делится на 2 и 5 не больше 3 ", " 10 не делится на 2 и 5 больше 3 ", " 10 не делится на 2 и 5 не больше 3 " — ложны.



ИЛИ

Операция, выражаемая связкой "или" (в неисключающем смысле этого слова), называется дизъюнкцией (лат. disjunctio — разделение) или *логическим сложением* и обозначается знаком $\vee$ (или **плюсом**).



Высказывание $A \vee B$ ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B ложны.



Например, высказывание "10 не делится на 2 или 5 не больше 3" ложно, а высказывания "10 делится на 2 или 5 больше 3", "10 делится на 2 или 5 не больше 3", "10 не делится на 2 или 5 больше 3"— истинны.



ЕСЛИ-ТО

Операция, выражаемая связками "если ..., то", "из ... следует", "... влечет ...", называется импликацией (лат. *implicatio* — тесно связаны) и обозначается знаком $\rightarrow$. Высказывание $A \rightarrow B$ ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно.



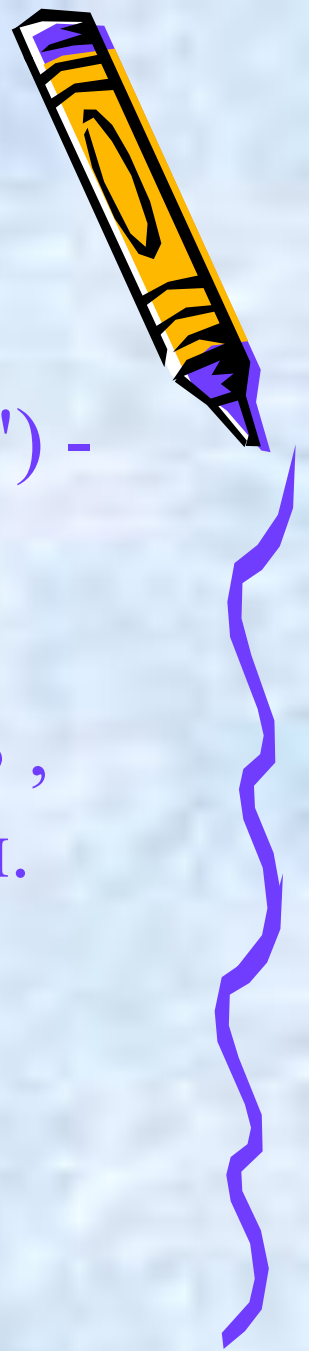
РАВНОСИЛЬНО

Операция, выражаемая связками "*тогда и только тогда*", "*необходимо и достаточно*", "*... равносильно ...*", называется **эквиваленцией** или *двойной импликацией* и обозначается знаком $\sim$. Высказывание $A \sim B$ истинно тогда и только тогда, когда значения A и B совпадают.



С помощью логических переменных и символов логических операций любое высказывание можно формализовать, то есть заменить *логической формулой*.





Определение логической формулы:

1. Всякая логическая переменная и символы "истина" ("1") и "ложь" ("0") - формулы.
2. Если A и B - формулы, то $\overline{A}$, $A \cdot B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ - формулы.
3. Никаких других формул в алгебре логики нет.



Логический элемент компьютера —
это часть электронной логической
схемы, которая реализует
элементарную логическую функцию.



Логическими элементами
компьютеров являются
электронные схемы И, ИЛИ,
НЕ, И—НЕ, ИЛИ—НЕ и другие.



Каждый логический элемент имеет свое условное обозначение, которое выражает его логическую функцию, но не указывает на то, какая именно электронная схема в нем реализована. Это упрощает запись и понимание сложных логических схем.



Таблица истинности это табличное представление логической схемы (операции), в котором перечислены все возможные сочетания значений истинности входных сигналов (операндов) вместе со значением истинности выходного сигнала (результата операции) для каждого из этих сочетаний.



Схема И

Схема И реализует конъюнкцию двух или более логических значений.

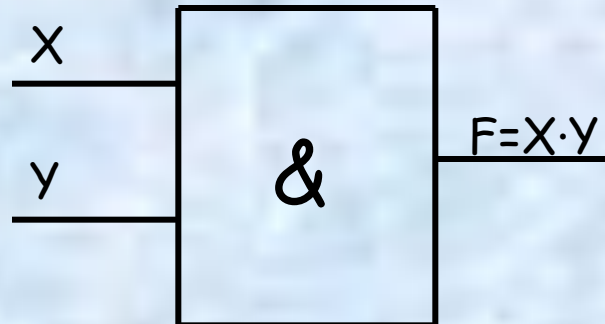


Таблица истинности схемы И

X	Y	$X * Y$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Единица на выходе схемы И будет тогда и только тогда, когда на всех входах будут единицы. Когда хотя бы на одном входе будет ноль, на выходе также будет ноль.



С х е м а ИЛИ

Схема ИЛИ реализует дизъюнкцию двух или более логических значений.

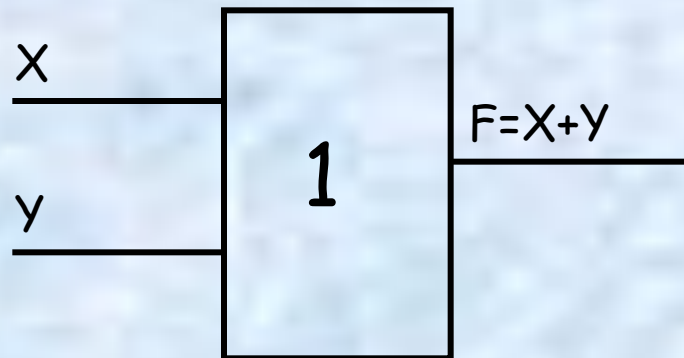
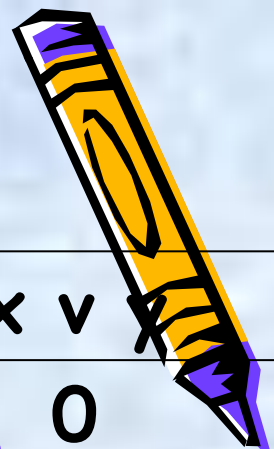


Таблица истинности схемы ИЛИ



x	y	$x \vee y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Когда хотя бы
на одном входе
схемы ИЛИ бу-
дет единица, на
её выходе

также будет
единица.



С х е м а Н Е

Схема НЕ (инвертор) реализует операцию отрицания. Связь между входом x этой схемы и выходом F можно записать соотношением $F = \overline{x}$ где $\overline{x}$ читается как "не x " или "инверсия x ".

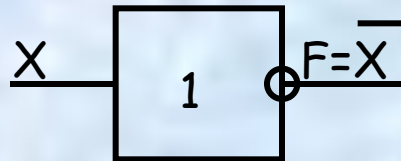


Таблица истинности схемы НЕ

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Если на входе
схемы 0, то на
выходе 1. Когда
на входе 1, на
выходе 0.



С х е м а И—НЕ

Схема И—НЕ состоит из элемента И и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы И. Связь между выходом F и входами x и y схемы записывают следующим образом:
 $F = \overline{x \cdot y}$, где $\overline{x \cdot y}$ читается как "инверсия x и y ".

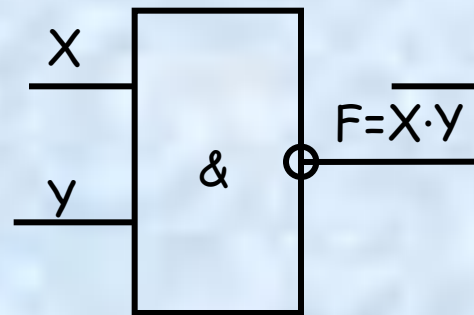


Таблица истинности схемы И—НЕ



x	y	$x \cdot y$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

С х е м а ИЛИ—НЕ



Схема ИЛИ—НЕ состоит из элемента ИЛИ и инвертора и осуществляет отрицание результата схемы ИЛИ. Связь между выходом F и входами x и y схемы записывают следующим образом: $F = \overline{x + y}$, где $\overline{x + y}$, читается как "инверсия x или y ".

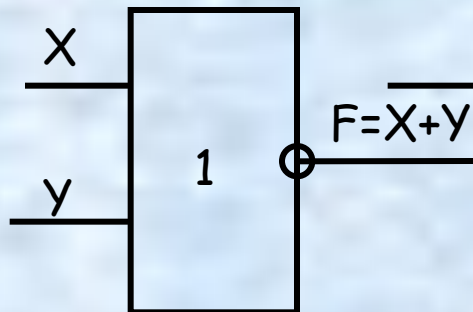
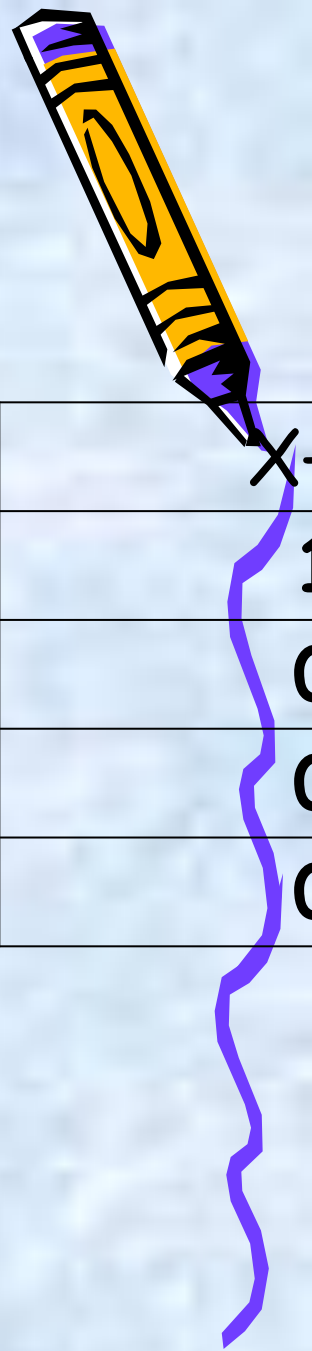


Таблица истинности схемы ИЛИ—НЕ

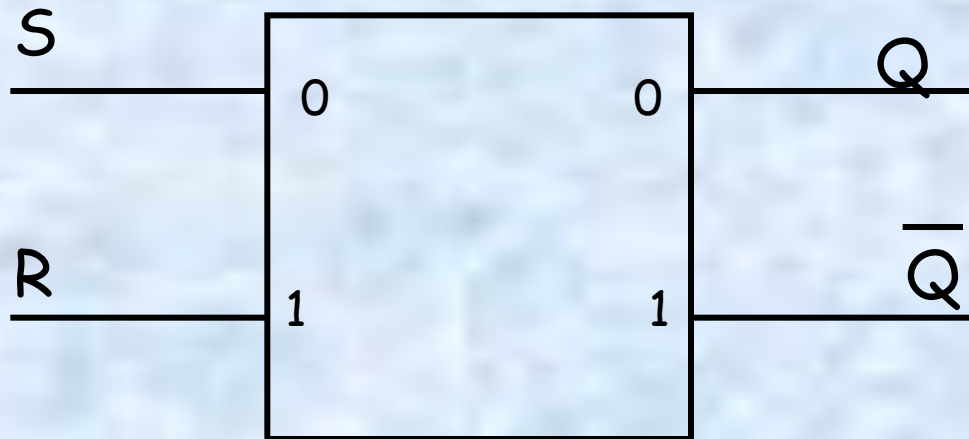
x	y	x—y
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



Триггер — это электронная схема, широко применяемая в регистрах компьютера для надёжного запоминания одного разряда двоичного кода. Триггер имеет два устойчивых состояния, одно из которых соответствует двоичной единице, а другое — двоичному нулю.



Самый распространённый тип триггера — так называемый RS-триггер (S и R, соответственно, от английских *set* — установка, и *reset* — сброс).



Сумматор — это электронная логическая схема, выполняющая суммирование двоичных чисел.

Сумматор служит, прежде всего, центральным узлом арифметико-логического устройства компьютера, однако он находит применение также и в других устройствах машины.



Многоразрядный двоичный сумматор

