Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное бюджетное государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Уральский государственный педагогический университет»
Математический факультет
Кафедра математического анализа

Теория вероятностей и математическая статистика (ТВиМС).

Часть 3. Основные теоремы теории вероятностей. Повторные испытания. Теоремы Муавра – Лапласа.

Бодряков Владимир Юрьевич, д.ф.-м.н.
зав. кафедрой математического анализа МФ УрГПУ

E-mail: Bodryakov_VYu@e1.ru

Екатеринбург – 2011-2012

Литература и интернет - ресурсы

1. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учебное пособие. М.: Академия, 2003. – 448 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 479 с.
3. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие. – М.: Высшее образование, 2006. – 404 с.
4. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Фазис, 1998. – 144 с.
5. http://e-lib.uspu.ru
6. www.exponenta.ru

§1. Основные теоремы теории вероятностей

- **Теорема (сложения вероятностей несовместных событий).** Вероятность появления хотя бы одного из двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:

- $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

- Док-во: Пусть полное пространство всех возможных исходов испытания $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ состоит из n элементарных событий. Пусть событию A благоприятствует m_A исходов из n: $A = \{\omega_{1A}, \omega_{2A}, \ldots, \omega_{mA}\}$. Пусть событию B благоприятствует m_B исходов из n : $B = \{\omega_{1B}, \omega_{2B}, \ldots, \omega_{mB}\}$. При этом в силу несовместности событий A и B все ω_{iA} и ω_{jB} различны. Тогда появлению хотя бы одного из двух несовместных событий A, B благоприятствует как появление любого исхода из множества элементарных событий A, так и появление любого исхода из множества элементарных событий B. Согласно комбинаторному принципу сложения всего таких событий: $m = m_A + m_B$. Поэтому,

- $P(A + B) = \frac{m}{n} = \frac{m_A + m_B}{n} = \frac{m_A}{n} + \frac{m_B}{n} = P(A) + P(B)$, ч.т.д.

§1. … продолжение

- **Следствие из теоремы сложения вероятностей несовместных событий.** Вероятность появления хотя бы одного из нескольких попарно несовместных событий A, B, C, …, N равна сумме вероятностей этих событий:
  - $P(A + B + C + \ldots + N) = P(A) + P(B) + P(C) + \ldots + P(N)$.
- Док-во: *СРС.*
- Пример 1. Найти вероятность выпадения «5» или «6» при бросании одной игральной кости.
- Решение: При бросании одной игральной кости возможны шесть равновероятных исходов, т.е. пространство элементарных событий есть $\Omega = \{«1», «2», «3», «4», «5», «6»\}$, $n = |\Omega| = 6$. Событию A – «Выпало 5 очков» благоприятствует единственный исход из Ω, т.е. $P(A) = 1/6$. Аналогично, событию B – «Выпало 6 очков» благоприятствует также единственный исход из Ω, $P(B) = 1/6$. События A и B несовместны. По теореме сложения вероятностей несовместных событий вероятность события $A + B$ – «Выпало 5 или 6 очков» равна
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.
- Ответ: $P(A + B) = 1/3$.

§1. … продолжение

- **Теорема о сумме вероятностей событий, образующих полную группу.** Сумма вероятностей событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$, образующих полную группу, равна единице:
  - $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = 1.$
- Док-во: Пусть полное пространство всех возможных исходов испытания $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ состоит из n элементарных событий. События A_1, $A_2, \ldots, A_k$ образуют полную группу, а значит по определению, попарно несовместны и вместе образуют достоверное событие: $A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \Omega$, вероятность которого равна единице. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:
  - $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k) = P(\Omega) = 1$, ч.т.д.
- Пример: Найти вероятность выпадения числа очков, не меньшего двух и не большего пяти при бросании одной игральной кости.
- Решение: События A_1 – «Число выпавших очков $2 \le S \le 5$», A_2 – «$S = 1$» и A_3 – «$S = 6$», как нетрудно проверить, образуют полную группу. При этом события A_2 и A_3 являются элементарными; их вероятности $P(A_2) = P(A_3) = 1/6$. Поэтому вероятность сложного события A_1 есть
  - $P(A_1) = 1 - P(A_2) - P(A_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$
- Ответ: $P(A_1) = 2/3$.

§1. … продолжение

- **Определение:** Противоположными называют два единственно возможных события, образующих полную группу. Если одно из них обозначено как событие A, то противоположное к нему принято обозначать как $\bar{A}$. Традиционными являются также обозначения $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$.

- **Теорема о сумме вероятностей противоположных событий.** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

  - $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = p + q = 1.$

- Док-во: *СРС.*

- **Замечание:** Нередко найти вероятность события, противоположного к интересующему нас, т.е. $P(\bar{A}) = q$, оказывается проще, чем найти $P(A) = p$. Тогда искомую вероятность $P(A)$ находят как

  - $P(A) = 1 - P(\bar{A}),$

- или

  - $p = 1 - q.$

§1. … продолжение

- Пример 3. Из полного набора костей домино наудачу берут пять. Найти вероятность того, что среди отобранных будет хотя бы одна кость с шестеркой (событие A).
- Решение: Как известно, полный набор костей домино содержит 28 костей, причем среди них имеется семь костей, содержащих шестерку, а именно, 6:6, 6:5, 6:4, 6:3, 6:2, 6:1, 6:0.
- Задача, конечно, может быть решена «в лоб». Сложное событие A может быть представлено как сумма более простых несовместных событий:
  - $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5,$
- где
- A_1 – «Среди отобранных 5-ти костей ровно одна содержит шестерку»;
- A_2 – «Среди отобранных 5-ти костей ровно две содержит шестерку»;
- ………………………………………………………………………….
- A_5 – «Среди отобранных 5-ти костей ровно пять содержит шестерку».
- Число способов извлечь 5 каких-либо костей из полного набора домино составляет
  - $n = C^5_{28}.$

§1. … продолжение

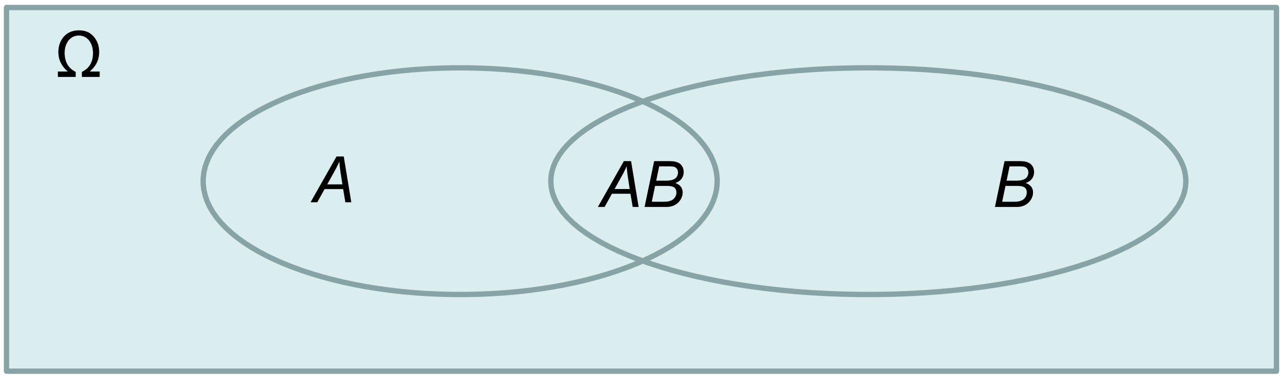
- Число возможностей осуществления события A_1 составляет согласно комбинаторному принципу умножения
  - $m_1 = C^1{}_7 \times C^4{}_{21}$,
- т.е. из взятых 5 карт домино 1 – из 7, содержащих шестерку; 4 − из 21, не содержащих шестерки.
- Аналогично, число возможностей осуществления события A_2 равно
  - $m_2 = C^2{}_7 \times C^3{}_{21}$,
- и т.д. Наконец, число возможностей осуществления события A_2 равно
  - $m_5 = C^5{}_7 \times C^0{}_{21}$.
- Полное число возможностей осуществления события A составляет согласно комбинаторному принципу сложения
  - $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5$.
- Искомая вероятность события A равна
  - $P(A) = m/n$.

§1. … продолжение

- ОДНАКО! Существует гораздо более короткий путь решения задачи. Вычислим вероятность противоположного к событию A события $\bar{A}$ – «Среди отобранных пяти костей не будет ни одной кости с шестеркой». Число способов осуществления противоположного события $\bar{A}$ есть
  - $\neg m = C^5_{21}$,
- т.е. из взятых 5 карт – все 5 − из 21, не содержащих шестерки.
- Искомая вероятность события $\bar{A}$ равна
  - $P(\bar{A}) = \neg m/n = C^5_{21}/C^5_{28} \approx 0{,}207.$
- Соответственно, вероятность искомого («прямого») события равна
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}793.$
- <u>Ответ:</u> $P(A) \approx 0{,}793.$

§1. … продолжение

- **Определение:** Произведением (пересечением) событий A и B называется событие $AB = A \cdot B = A \cap B$, состоящее в совместном появлении этих событий. Иными словами, событие AB состоит из элементарных событий, являющихся частью как события $A \subset \Omega$ (пространство исходов), так и события $B \subset \Omega$ (см. рис.).

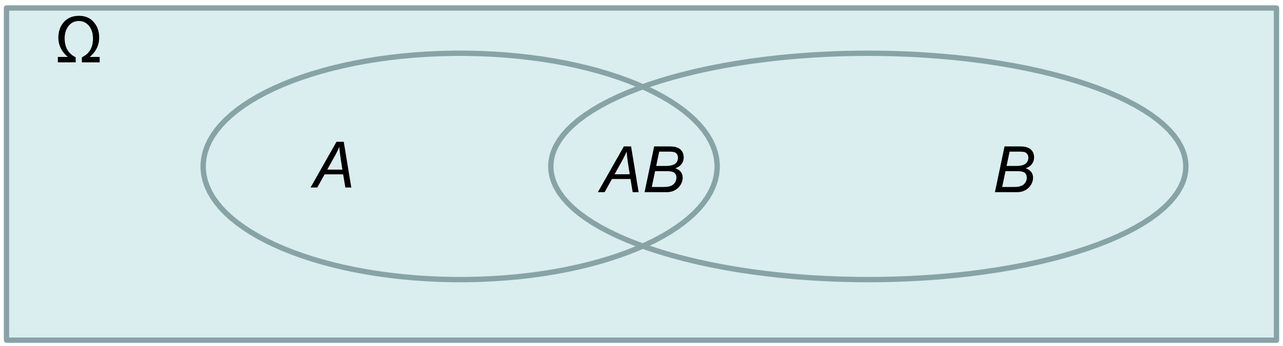


- **Определение:** Произведением (пересечением) событий A, B, C, …, N называется событие $ABC \ldots N$, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

- **Определение:** Условной вероятностью $P_A(B)$ события B при условии осуществления события A называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A уже наступило.

§1. … продолжение

- **Теорема об условной вероятности.** Условная вероятность $P_A(B)$ события B при условии осуществления события A может быть найдена по формуле:
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A)$.



- <u>Док-во:</u> Будем считать, что пространство элементарных событий Ω состоит из $n = |\Omega|$ элементов – исходов. Событие $A \subset \Omega$ состоит из $m_A + m_{AB}$ исходов («собственные» исходы A плюс исходы, совместные с событием B, т.е. благоприятствующие как A, так и B)). Событие $B \subset \Omega$ состоит из $m_B + m_{AB}$ исходов («собственные» исходы B плюс исходы, совместные с событием A).
- Вероятность события AB равна по определению вероятности
  - $P(AB) = m_{AB}/n$;

§1. … продолжение

- вероятность события AB равна по определению
  - $P(A) = (m_A + m_{AB})/n.$
- Событию B, при условии осуществления события A благоприятствует m_{AB} исходов из $m_A + m_{AB}$ (событие A осуществилось!). Согласно тому же классическому определению вероятности для условной вероятности события B при условии осуществления A имеем:
  - $P_A(B) = m_{AB}/(m_A + m_{AB}).$
- А это, как легко получить, разделив почленно выражения для вероятностей $P(AB)$ и $P(A)$, и есть доказываемый результат:
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A),$ ч.т.д.
- Полученный результат можно обобщить и распространить за пределы классической схемы с конечным числом равновероятных исходов. Вообще, для условной вероятности справедливо следующее
- **Определение:** Условная вероятность $P_A(B)$ события B при условии осуществления события A по определению равна:
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A), \quad (P(A) > 0).$

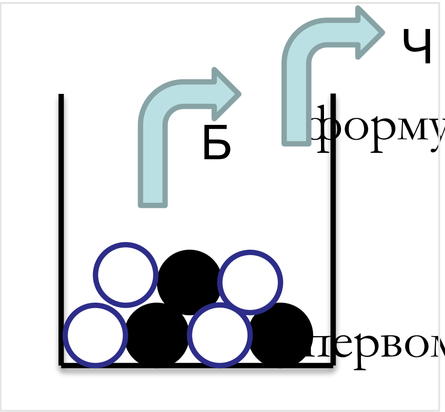
§1. … продолжение

- **Теорема умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления двух событий A и B равна произведению (безусловной) вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое уже произошло:
  - $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$
- Док-во: Справедливость утверждения теоремы немедленно вытекает из определения условной вероятности $P_A(B) = P(AB)/P(A)$, откуда
  - $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B),$ ч.т.д.
- **Замечание.** Применив теорему об умножении вероятностей к событию $BA = AB$, убеждаемся, что
  - $P(BA) = P(B) \cdot P_B(A) = P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$
- **Следствие из теоремы умножения вероятностей.** Вероятность совместного появления событий A_1, A_2, …, A_n равна:
  - $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A1}(A_2) \cdot P_{A1A2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A1A2\ldots A(n-1)}(A_n).$
- В частности, для вероятности совместного осуществления трех событий A, B, C имеем:
  - $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C).$

§1. … продолжение

- <u>Пример 4.</u> В урне 4 белых (Б) и 3 черных (Ч) шара. Из урны один за другим вынимают два шара. Найти вероятность появления белого шара при втором испытании (событие B), если при первом испытании был извлечен черный шар (событие A).

- <u>Решение:</u> Поскольку после первого опыта (извлечен один Ч шар) в урне осталось шесть шаров (4Б + 2Ч), вероятность извлечь Б шар при втором испытании составляет:



$$P_A(B) = 4/6 = 2/3.$$

С другой стороны, согласно общей формуле условной вероятности:

$$P_A(B) = P(AB)/P(A),$$

где вероятность извлечения Ч шара при первом испытании (событие A) равна:

$$P(A) = 3/7.$$

- Вероятность извлечения пары шаров в указанном порядке (Ч, затем Б) равна $P(AB) = C_3^{\,1} \times C_4^{\,1} / A_7^{\,2} = 3 \times 4 / 42 = 2/7$. Отсюда
  - $P_A(B) = P(AB)/P(A) = (2/7)/(3/7) = 2/3$, как и ранее.
- Ответ: $P_A(B) = 2/3$.

§1. … продолжение

- Пример 4. Студент знает 20 вопросов из 25. Какова вероятность, что студент правильно ответит на три предложенных вопроса из 25?
- Решение: *СРС*.
- Ответ: $P(A) = 57/115 \approx 0{,}496$.
- **Определение:** Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:
  - $P_A(B) = P(B)$.
- **Замечание:** При этом и $P_B(A) = P(A)$, т.е. свойство независимости событий взаимно.
- Док-во: *СРС*.
- **Следствие из теоремы умножения вероятностей для независимых событий.** Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:
  - $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.
- **Определение:** Два события называются независимыми, если вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий: $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

§1. … продолжение

- **Утверждение:** Если события A и B независимы, то независимы также события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$.
- Док-во: Докажем, например, независимость событий A и $\bar{B}$. Имеем
  - $A = AB + A\bar{B}$,
- т.е. событие A происходит либо совместно с событием B, либо с событием $\bar{B}$, противоположным к событию B. При этом события AB и $A\bar{B}$ несовместны, и к ним может быть применена теорема сложения вероятностей несовместных событий с учетом независимости A и B:
  - $P(A) = P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)\cdot P(B) + P(A\bar{B})$.
- Теперь
  - $P(A\bar{B}) = P(A) - P(A)\cdot P(B) = P(A)\cdot[\,1 - P(B)] = P(A)\cdot P(\bar{B})$.
- Но последнее как раз и означает независимость событий A и $\bar{B}$, ч.т.д.
- Док-во независимости событий $\bar{A}$ и B, $\bar{A}$ и $\bar{B}$ – СРС.
- **Определение:** Несколько событий называются попарно независимыми, если каждые два из них независимы.
- **Определение:** Несколько событий называются независимыми в совокупности, если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и произведение остальных.

§1. … продолжение

- Если события A, B и C независимы, то попарно независимы события A и B, A и C, B и C, а также независимы A и BC, B и AC, C и AB.
- **Замечание:** Из попарной независимости событий A, B и C еще не следует их независимость в совокупности.
- <u>Док-во:</u> Пусть полное пространство элементарных событий состоит четырех равновероятных исходов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$; соответствующие вероятности $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p = 1/4$.
- Пусть событие A состоит из двух элементов: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$; аналогично, события B и C также двухэлементны: $B = \{\omega_1, \omega_3\}$; $C = \{\omega_1, \omega_4\}$. При этом $P(A) = p_1 + p_2 = 1/4 + 1/4 = 1/2$. Аналогично, $P(B) = P(C) = 1/2$.
- Убедимся в попарной независимости событий A, B и C:
- $AB = \{\omega_1\} \Rightarrow P(AB) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A) \cdot P(B)$. Аналогично,
- $AC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(AC) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(A) \cdot P(C)$.
- $BC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(BC) = 1/4 = 1/2 \times 1/2 = P(B) \cdot P(C)$.
- Эти равенства и означают попарную независимость событий A, B и C.
- С др. стороны, $ABC = \{\omega_1\} \Rightarrow P(ABC) = 1/4 \neq 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = P(A) \cdot P(B) \cdot P(B)$,
- т.е. события A, B и C не являются независимыми в совокупности, <u>ч.т.д.</u>

§1. … продолжение

- **Следствие из теоремы умножения вероятностей независимых событий:** Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, то
  - $P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot \ \ldots \ \cdot P(A_n)$.
- Док-во: СРС.
- **Замечание:** Если события A, B, C, …, N попарно независимы, то попарно независимыми будут также противоположные к ним события $\neg A$, $\neg B$, $\neg C$, …, $\neg N$.
- Пример 5. Найти вероятность выпадения в сумме 12 очков при однократном бросании двух игральных кубиков. Изменится ли ответ, если дважды бросается один кубик?
- Решение: СРС.
- Ответ: $P(AB) = 1/36$.

§1. … продолжение

- **Теорема «Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий».** Вероятность появления *хотя бы одного* из событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, независимых в совокупности, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots, \bar{A}_n$:
  - $P(A) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n,$
- $q_1 = P(\bar{A}_1);\ q_2 = P(\bar{A}_2);\ q_3 = P(\bar{A}_3);\ \ldots;\ q_n = P(\bar{A}_n).$
- <u>Док-во:</u> Обозначим через A интересующее нас событие A – «В результате испытаний появилось хотя бы одно из независимых в совокупности событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$».
- Противоположным к событию A является событие $\bar{A}$ – «В результате испытаний не появилось ни одно из событий $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, т.е. реализовалась одновременно вся совокупность противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \bar{A}_3, \ldots, \bar{A}_n$».
- Вероятность противоположного события, с учетом независимости,
- $P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot \ldots \cdot P(\bar{A}_n) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n.$
- С другой стороны для вероятностей противоположных событий имеем: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$, откуда и вытекает требуемый результат $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$, <u>ч.т.д.</u>

§1. … продолжение

- **Следствие:** Если вероятности событий $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ одинаковы: $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \dots = P(A_n) = q$, то вероятность появления хотя бы одного события есть:

  - $P(A) = 1 - q^n$.

- <u>Пример 6:</u> Вероятность поражения цели первым стрелком $p_1 = 0{,}8$; вторым – $p_2 = 0{,}6$. Найти вероятность того, что цель будет поражена при одновременном выстреле обоих стрелков (для поражения цели достаточно одного попадания).
- <u>Решение:</u> Противоположным к интересующему нас событию A – «В цель попал по крайней мере один стрелок» является событие $\bar{A}$ – «В цель не попал ни один из стрелков».
- Вероятность противоположного события, с учетом независимости событий, состоящих в попадании каждого из стрелков, равна:
- $P(\bar{A}) = q_1 \cdot q_2 = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = 1 - p_1 - p_2 + p_1 \cdot p_2$.
- Соответственно, вероятность «прямого» события A равна:
- $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - q_1 \cdot q_2 = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = 0{,}92$.
- <u>Ответ:</u> $P(A) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2 = 0{,}92$.

§1. … продолжение

- Пример 7: Вероятность того, что стрелок попадет в цель, равна $p = 0{,}4$ при каждом выстреле. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,9 он попал в цель хотя бы один раз?
- Решение: Обозначим через A_1, A_2, …, A_n события, состоящие в попадании стрелком при 1-ом, 2-ом, … n-ом выстреле. По условию нас интересует вероятность попадания в цель хотя бы один раз при сделанных n выстрелах (событие $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$).
- Найдем вероятность противоположного события $\bar{A}$ – «В цель не попал ни один из n выстрелов»: $P(\bar{A}) = q^n$, где $q = 1 - p = 0{,}6$. Соответственно, вероятность «прямого» события A равна $P(A) = 1 - q^n$. Необходимое число выстрелов n найдем из условия $P(A) > 0{,}9$ (см. табл.):

№ выстрела *n*	q^n	$1 - q^n$	Прим.
1	0,6	0,4	
2	0,36	0,64	
3	0,216	0,784	
4	0,1296	0,8704	
5	0,0778	0,9222	> 0,9

- Ответ: $n = 5$.

§1. … продолжение

- **Теорема сложения вероятностей совместных событий.** Вероятность появления (хотя бы) одного из двух совместных событий A и B равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного появления:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$
- Док-во: В силу совместности событий A и B их сумма – событие $A + B$ – наступит при наступлении одного из трех несовместных событий: $A\bar{B}$, $\bar{A}B$ или AB:
  - $A + B = A\bar{B} + \bar{A}B + AB.$
- При этом, очевидно,
  - $A = A\bar{B} + AB.$
  - $B = \bar{A}B + AB.$
- С учетом несовместности событий $A\bar{B}$, $\bar{A}B$, AB классическая теорема о сложении вероятностей дает:
- $P(A + B) = P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB);$
- $P(A) = P(A\bar{B}) + P(AB);$
- $P(B) = P(\bar{A}B) + P(AB).$
- Вычитая почленно первое равенство из суммы второго и третьего, получим требуемый результат, ч.т.д.

§1. … продолжение

- **Замечание 1.** В доказанной формуле сложения вероятностей совместных событий события A и B могут быть как зависимыми, так и независимыми.
- Если события A и B зависимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P_A(B)$ и
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P_A(B)$.
- Если события A и B независимы, то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ и
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$.
- **Замечание 2.** Если события A и B несовместны, то $P(AB) = 0$, и получаем переход к классической теореме сложения вероятностей:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
- <u>Пример 8.</u> Два игральных кубика бросили один раз. Какова вероятность того, что «шестерка» выпадет хотя бы один раз?
- <u>Решение:</u> Обозначим: событие A – «Шестерка выпала на первом кубике», $P(A) = \frac{1}{6}$; событие B – «Шестерка выпала на втором кубике», $P(B) = \frac{1}{6}$. Соббытия A и B совместны и независимы. По теореме о сложении вероятностей совместных и независимых событий:
  - $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}$.
- <u>Ответ:</u> $P(A + B) = 11/36$.

§1. … продолжение

- **Теорема «Формула полной вероятности».** Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие условные вероятности события A:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$, –
- формула полной вероятности.
- <u>Док-во:</u> По условию теоремы
  - $A = AB_1 + AB_2 + \ldots + AB_n$,
- причем события AB_1, AB_2, … AB_n, несовместны вследствие несовместности событий B_1, B_2, …, B_n. По теореме сложения вероятностей для несовместных событий
  - $P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \ldots + P(AB_n)$.
- По теореме умножения вероятностей $P(AB_1) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A)$, $P(AB_2) = P(B_2) \cdot P_{B2}(A)$, …, $P(AB_n) = P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$, откуда и следует формула полной вероятности:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)$, <u>ч.т.д.</u>

§1. … продолжение

- Пример 9. В первой урне 4 белых (Б.) и 6 черных (Ч.) шаров. Во второй урне – 3 Б. и 7 Ч. шаров. Из наудачу выбранной урны вынимают один шар. Какова вероятность того, что он белый (Б.)?
- Решение: Обозначим: Урна I: 4 Б. + 6 Ч. шаров; урна II: 3 Б. + 7 Ч. шаров. Событию A – «Из выбранной наудачу урны вынут Б. шар» предшествуют два события B_1, B_2, образующие полную группу. А именно: B_1 – «Выбрана урна I, и шар вынут из нее»; B_2 – «Выбрана урна II, и шар вынут из нее»;
- Согласно условию одна из урн выбрана случайно (наудачу). Поэтому
  - $P(B_1) = P(B_2) = ½$;
- как и должно быть, $P(B_1) + P(B_2) = 1$. Если выбрана урна I (событие B_1), то (условная вероятность вынуть Б. из нее равна:
  - $P_{B1}(A) = 4/10$.
- Если выбрана урна II (событие B_2), то (условная вероятность вынуть Б. из нее равна:
  - $P_{B1}(A) = 3/10$.
- По формуле полной вероятности, полная вероятность события A:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = ½ \cdot (4/10) + ½ \cdot (3/10) = 7/20$.
- Ответ: $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = 7/20$.

§1. … продолжение

- <u>Пример 10.</u> В первой урне 4 белых (Б.) и 6 черных (Ч.) шаров. Во второй урне – 3 Б. и 7 Ч. шаров. Из каждой урны вынимают по одному шару, а затем случайным образом из этой пары шаров выбирают один. Какова вероятность того, что он белый (Б.)?
- <u>Решение</u>: *СРС*.
- <u>Ответ:</u> $P(A) = 7/20$.

§1. … продолжение

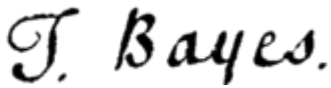
- Пример 11. Вторая смена в цехе производит в два раза меньше изделий, чем первая, а процент брака у нее в 1,5 раза больше. Детали от обеих смен в не рассортированном виде сложены (для предъявления ОТК). Наудачу взятая оттуда деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что она сделана второй сменой?
- Решение: Пусть первая (I) смена произвела N деталей, причем среди них kN бракованных; здесь k – доля (процент) брака.
- Тогда по условию вторая (II) смена произвела N деталей, причем среди них $k \cdot N = kN$.
- Таким образом, среди деталей, произведенных I и II сменами имеется $kN + kN = (7/4)kN$ бракованных изделий.
- Доля I смены в $(7/4)kN$ бракованных изделиях составляет
  - $kN / (7/4)kN = 4/7$.
- Доля II смены в $(7/4)kN$ бракованных изделиях составляет
  - $kN / (7/4)kN = 3/7$.
- Это и есть вероятность события A − «Брак. изделие сделано II сменой».
- Ответ: $P(A) = 3/7$.
- Прим. Задачи такого рода подразумевают вычисление *Бейесовской вероятности* некоторого события (см. далее).

§1. … продолжение

- **Вероятность гипотез. Формула Бейеса.** Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу. Пусть опыт проведен и событие A уже фактически наступило. Возникает вопрос, с какой вероятностью событию A предшествовало событие B_1, с какой – событие B_2, …, с какой, наконец, – событие B_n?
- Ответ на поставленный вопрос может быть найден с помощью формулы Бейеса (см. далее).
- **Определение:** Предположения о том, какое из событий полной группы B_1, B_2, …, B_n предопределило появление события A называются вероятностными (бейесовскими) гипотезами.
- **Определение:** Вероятностями бейесовских гипотез называются соответствующими бейесовскими вероятностями. Иными словами, бейесовскими вероятностями называются условные вероятности $P_A(B_1)$, $P_A(B_2)$, …, $P_A(B_n)$ того, что событие A осуществилось совместно с событием: либо B_1, либо B_2, …, либо B_n, соответственно.

§1. … продолжение

- Историческая справка:
- Бейес (Байес) Томас
- *English*: Bayes Thomas



Томас Бейес (Байес, *англ.* Reverend Thomas Bayes [beɪz]) (1702 − 17.04.1761) − английский математик и пресвитерианский священник, член Лондонского королевского общества (1742). Родился в 1702 году в Лондоне. Обучался дома, в 1719 году поступил в Эдинбургский университет. Затем Байес помогал отцу проводить службу, а вскоре, в 30-х годах, сам стал священником в пресвитерианской церкви. В 1752 году он вышел в отставку; умер в 1761 году.

Достижения: Математические интересы Байеса относились к теории вероятностей (ТВ). Он сформулировал и решил одну из основных задач этого раздела математики (теорема Бейеса). Работа, посвящённая этой задаче, была опубликована в 1763 году, уже после его смерти. Формула Бейеса, дающая возможность оценить вероятность событий эмпирическим путём, играет важную роль в современной математической статистике (МС) и ТВ. Другая крупная его работа − «Очерки к решению проблемы доктрины шансов». Используется терминология: бейесовская вероятность, бейесовская оценка решения, и др.

§1. … продолжение

- <u>Решение задачи Бейеса</u> (вывод формул(ы) Бейеса): Согласно формуле полной вероятности, полная вероятность события A, которое может быть реализовано лишь совместно с одним из событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) + \ldots + P(B_n) \cdot P_{Bn}(A).$
- Пусть, например, событие A произошло совместно (вследствие) события B_1. По теореме умножения вероятностей,
  - $P(AB_1) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) = P(A) \cdot P_A(B_1).$
- Отсюда для условной вероятности события B_1, при том условии, что событие A произошло, имеем:
  - $P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A)/P(A).$
- Аналогично для событий B_2, …, B_n имеем:
  - $P_A(B_2) = P(B_2) \cdot P_{B2}(A)/P(A);$
  - ……………………………….
  - $P_A(B_n) = P(B_n) \cdot P_{Bn}(A)/P(A).$
- Выписанные формулы и являются формулами Бейеса. <u>Задача решена.</u>

§1. … продолжение

- <u>Пример 12</u>. Число грузовых машин, проезжающих мимо колонки, относится к числу легковых машин как 3:2. Вероятность того, что проезжающая машина будет заправляться равна 0,1 для грузовой машины и 0,2 для легковой. У бензоколонки заправляется машина. Найти вероятность того, что это грузовик.
- <u>Решение:</u> Результатом наблюдения (вероятностного эксперимента) является событие A – «Машина остановилась для заправки». Событие А является результатом предшествующих событий полной группы:
- B_1 – «Проезжающая мимо заправки машина – грузовая»;
- B_2 – «Проезжающая мимо заправки машина – легковая».
- По условию, вероятности событий B_1 и B_2 есть: $P(B_1) = 3/5$; $P(B_2) = 2/5$.
- Условные вероятности того, что машина остановится для заправки (событие A) равны: $P_{B1}(A) = 0,1$ (для грузовой машины); $P_{B2}(A) = 0,2$ (для легковой машины). Полная вероятность события A есть:
  - $P(A) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B2}(A) = (3/5) \cdot 0,1 + (2/5) \cdot 0,2 = 0,7/5.$
- По формуле Бейеса:
  - $P_A(B_1) = P(B_1) \cdot P_{B1}(A)/P(A) = (3/5) \cdot 0,1/(0,7/5) = 3/7;$
  - $P_A(B_2) = P(B_2) \cdot P_{B2}(A)/P(A) = (2/5) \cdot 0,2/(0,7/5) = 4/7.$
- <u>Ответ:</u> Вероятность того, что заправляется грузовик $P_A(B_1) = 3/7$.

§2. Повторные испытания

- **Определение:** Если производится несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события A.
- **Постановка задачи (схема испытаний Бернулли).** Пусть производится серия из n независимых относительно события A испытаний, в каждом из которых событие A может с одной и той же вероятностью p появиться или не появиться с вероятностью $q = 1 - p$. Требуется найти вероятность $P_n(k)$ того, что событие A осуществится ровно k раз $(0 \leq k \leq n)$ и, следовательно, не осуществится $n - k$ раз.
- **Решение:** Вероятность сложного события, состоящего в том, что событие A появится ровно k раз (с вероятностью p) и не появится (событие $\bar{A}$) $n - k$ раз (с вероятностью $q = 1 - p$ раз), равна:
  - $P_n'(k) = P(A \cdot A \cdot \ldots \cdot A\text{: } k \text{ раз}) \cdot P(\bar{A} \cdot \bar{A} \cdot \ldots \cdot \bar{A} : n - k \text{ раз}) = p^k \cdot q^{n-k}$.
- С учетом, однако, того, что порядок появления события A безразличен (важно только, чтобы оно произошло ровно k раз) вероятность $P_n'(k)$ следует умножить на число перестановок из n элементов по k элементов, т.е. на C_n^k. В результате получаем окончательно выражение, известно как **формула Бернулли**:
  - $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$.

§2. … продолжение

- Историческая справка:
- Якоб Бернулли
- *Deutch*: Jakob Bernoulli

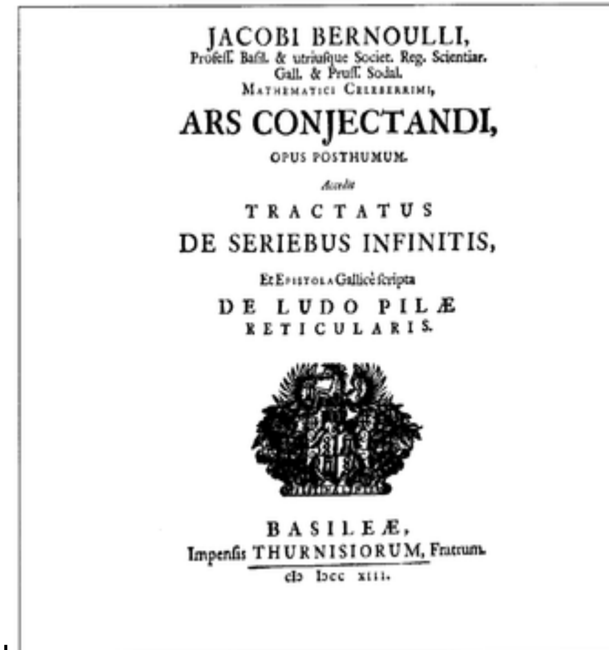
Я́коб Берну́лли (нем. Jakob Bernoulli, 27 декабря 1654, Базель, − 16 августа 1705, там же) − швейцарский математик, старший брат Иоганна Бернулли; профессор математики Базельского университета (с 1687 года).

Якоб родился в семье преуспевающего фармацевта Николая Бернулли. Вначале учился богословию, но увлёкся математикой, которую изучил самостоятельно. В 1677 году совершил поездку во Францию для изучения идей Декарта, затем в Нидерланды и Англию, где познакомился с Гуком и Бойлем. Вернувшись в Базель, некоторое время работал частным учителем. В 1684 году женился на Юдит Штупанус (Judith Stupanus), у них родились сын и дочь.

С 1687 года — профессор физики (позже — математики) в Базельском университете. 1684: штудирует первый мемуар Лейбница по анализу и становится восторженным адептом нового исчисления. Пишет письмо Лейбницу с просьбой разъяснить несколько тёмных мест. Ответ он получил только спустя три года (Лейбниц тогда был в командировке в Париже); за это время Якоб Бернулли самостоятельно освоил дифференциальное и интегральное исчисление, а заодно приобщил к нему брата Иоганна. По возвращении Лейбниц вступает в активную и взаимно-полезную переписку с обоими. Сложившийся триумвират — Лейбниц и братья Бернулли — 20 лет возглавлял европейских математиков и чрезвычайно обогатил новый анализ. 1699: оба брата Бернулли избраны иностранными членами Парижской Академии наук. В честь Якоба и Иоганна Бернулли назван кратер Bernoulli на Луне.

§2. … продолжение

- Историческая справка: Якоб Бернулли (продолжение)



JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar. Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,
ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.
BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIɔ Iɔcc xiii.

Научная деятельность: Первое триумфальное выступление молодого математика относится к 1690 году. Якоб решает задачу Лейбница о форме кривой, по которой тяжелая точка опускается за равные промежутки времени на равные вертикальные отрезки. Лейбниц и Гюйгенс уже установили, что это полукубическая парабола, но лишь Якоб Бернулли опубликовал доказательство средствами нового анализа, выведя и проинтегрировав дифференциальное уравнение. При этом впервые появился в печати термин «интеграл». Якоб Бернулли внёс огромный вклад в развитие аналитической геометрии и зарождение вариационного исчисления. Его именем названа лемниската Бернулли. Он исследовал также циклоиду, цепную линию, и особенно логарифмическую спираль. Якобу Бернулли принадлежат значительные достижения в теории рядов, дифференциальном исчислении, теории вероятностей и теории чисел, где его именем названы «числа Бернулли».

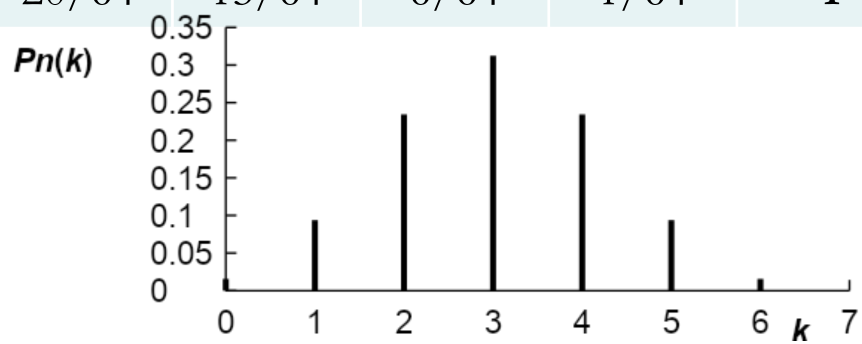
«Искусство предположений». Он изучил теорию вероятностей по книге Гюйгенса «О расчётах в азартной игре», в которой ещё не было определения и понятия вероятности (её заменяет количество благоприятных случаев). Якоб Бернулли ввёл значительную часть современных понятий теории вероятностей и сформулировал первый вариант закона больших чисел. Якоб Бернулли подготовил монографию в этой области, однако издать её не успел. Она была напечатана посмертно, в 1713 году, его братом Николаем, под названием «Искусство предположений». Это содержательный трактат по теории вероятностей, статистике и их практическому применению, итог комбинаторики и теории вероятностей XVII века. Имя Якоба носит важное в комбинаторике распределение Бернулли. Якоб Бернулли издал также работы по различным вопросам арифметики, алгебры, геометрии и физики.

.

- <u>Пример 13</u>. Монета брошена $n = 6$ раз. Найти вероятность того, что герб выпадет k ($k = 0, 1, \ldots, 6$) раз.
- <u>Решение:</u> При каждом очередном бросании монеты событие A – «Выпал герб (Г.)» может осуществиться с вероятностью $p =$ и не осуществиться с вероятностью $q = 1 - p =$. Ясно, что событие A является независимым относительно испытаний. Иными словами, испытания осуществляются по схеме Бернулли.
- Согласно формуле Бернулли, вероятность того, что из n бросаний Г. выпадет ровно k раз равна:
  - $P_6(k) = C_6^k \cdot p^k \cdot q^{6-k} = C_6^k \cdot (\,)^k \cdot (\,)^{6-k} = C_6^k \cdot (\,)^6.$
- Результаты расчетов удобно свести в таблицу:

k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	$\Sigma_k P_6(k)$
$P_6(k)$	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64	**1**

- <u>Ответ:</u> См. табл. и рис.

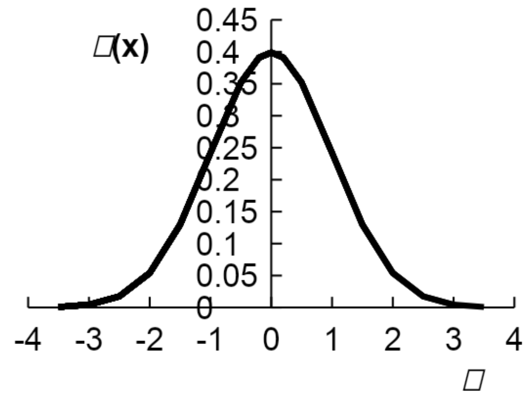


§3. Теоремы Муавра − Лапласа

- Выше была выведена формула Бернулли:
  - $P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$,
- позволяющая в рамках схемы испытаний Бернулли вычислить вероятность того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз. При больших n формулой Бернулли пользоваться неудобно: это связано с математическими трудностями вычисления очень больших чисел C_n^k, с одной стороны, и очень малых чисел p^k и q^{n-k}, с другой стороны.
- Существует, однако, возможность пользоваться приближенной (асимптотической) формулой, следующей из точной формулы Бернулли.
- **Определение:** Функцию $\varphi(x)$ называют асимптотическим приближением функции $f(x)$, если
  - $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 1.$
- П р и м е ч а н и е. Для частного случая, а именно, для $p = \frac{1}{2}$, асимптотическая формула была найдена в 1730 г. Муавром. В 1783 г. Лаплас обобщил формулу Муавра для произвольного $0 < p < 1$.

§3. Теоремы Муавра – Лапласа

- **Локальная теорема Муавра – Лапласа.** Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появится в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна
  - $$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x),$$
- где функция $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (см. рис.), а ее аргумент $x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$.
- Док-во: Не приводится.



- П р и м е ч а н и е 1. Асимптотическое выражение для вероятности $P_n(k)$ рекомендуется применять при рекомендуется применять при $n > 100$ и $npq > 20$.
- П р и м е ч а н и е 2. Функция $\varphi(x)$ является четной, т.е. $\varphi(x) = \varphi(-x)$.

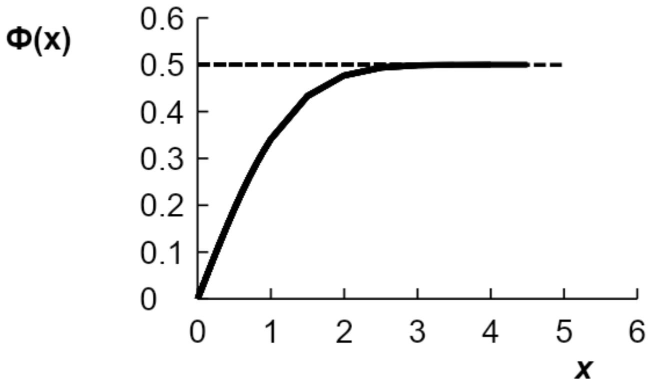
§3. Теоремы Муавра − Лапласа

- **Интегральная теорема Муавра – Лапласа.** Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(k_1 \le k \le k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз, приближенно равна

  - $P_n(k_1 \le k \le k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$,

- где функция Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$ табулирована (см. рис.), а ее аргумент $x_i = \frac{k_i - np}{\sqrt{npq}}$.

- Док-во: Не приводится.



- Примечание 1. Функция $\Phi(x)$ является нечетной, т.е. $\Phi(x) = -\Phi(-x)$.
- Примечание 2. Функция $\Phi(0) = 0$; $\Phi(x \to \infty) = \frac{1}{2}$. С высокой точностью можно считать, что $\Phi(x \ge 5) = \frac{1}{2}$.

Спасибо за внимание! Данный раздел закончен.

Ваши вопросы, замечания, предложения …