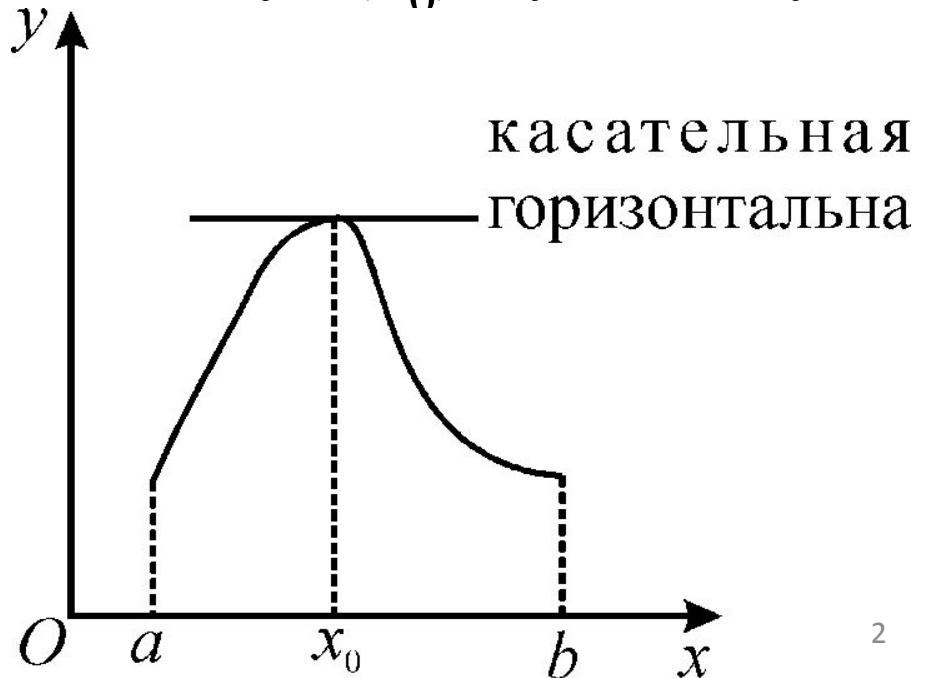


Лекция 11. Основные теоремы о дифференцируемых функциях, правило Лопиталя.

Теорема Ферма' (*Пьер Ферма*). Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и в некоторой внутренней точке этого отрезка принимает свое наибольшее или наименьшее значение, тогда, если производная в этой точке $f'(x_0)$ существует, то она непременно $= 0$.



Доказательство

Для определенности будем считать, что в точке x_0 функция принимает свое наибольшее значение, то есть: $\forall x \in [a, b] (f(x_0) \geq f(x))$, иными словами: $f(x) - f(x_0) \leq 0$. Пусть производная $f'(x)$ в точке x_0 $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ существует.

Требуется показать (!) $f'(x_0) = 0$.

Поскольку $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ в точке x_0 существует, то стало быть существуют левый и правый пределы в этой точке и они равны по третьему критерию существования предела в точке, а именно:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (*) \end{aligned}$$

Пусть $x \in (a, x_0)$, то есть находится слева от x_0 , тогда $x - x_0 < 0$ и поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (1)$$

Пусть $x \in (x_0, b)$, то есть находится справа от x_0 , тогда $x - x_0 > 0$ и поэтому:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \quad (2)$$

Перейдем к пределу в (1) и рассмотрим левый предел:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

С другой стороны, переходя к пределу в (2) и рассматривая правый предел, получаем:

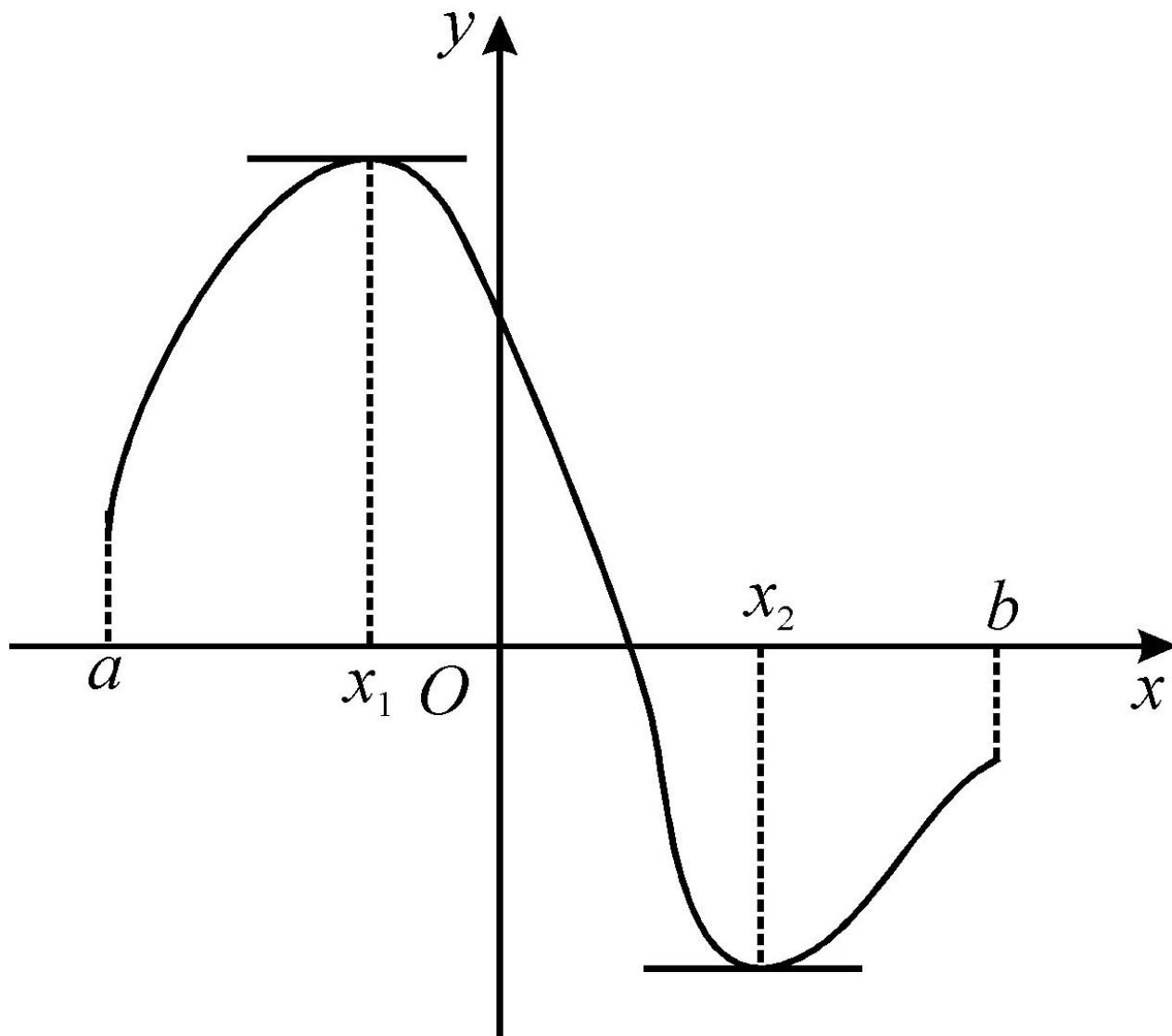
$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Из (*) заключаем, $f'(x_0) \geq 0$ & $f'(x_0) \leq 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$.
Что и требовалось доказать.

Определение. Точка кривой называется внутренней точкой, если она не совпадает ни с одним из концов этой прямой.

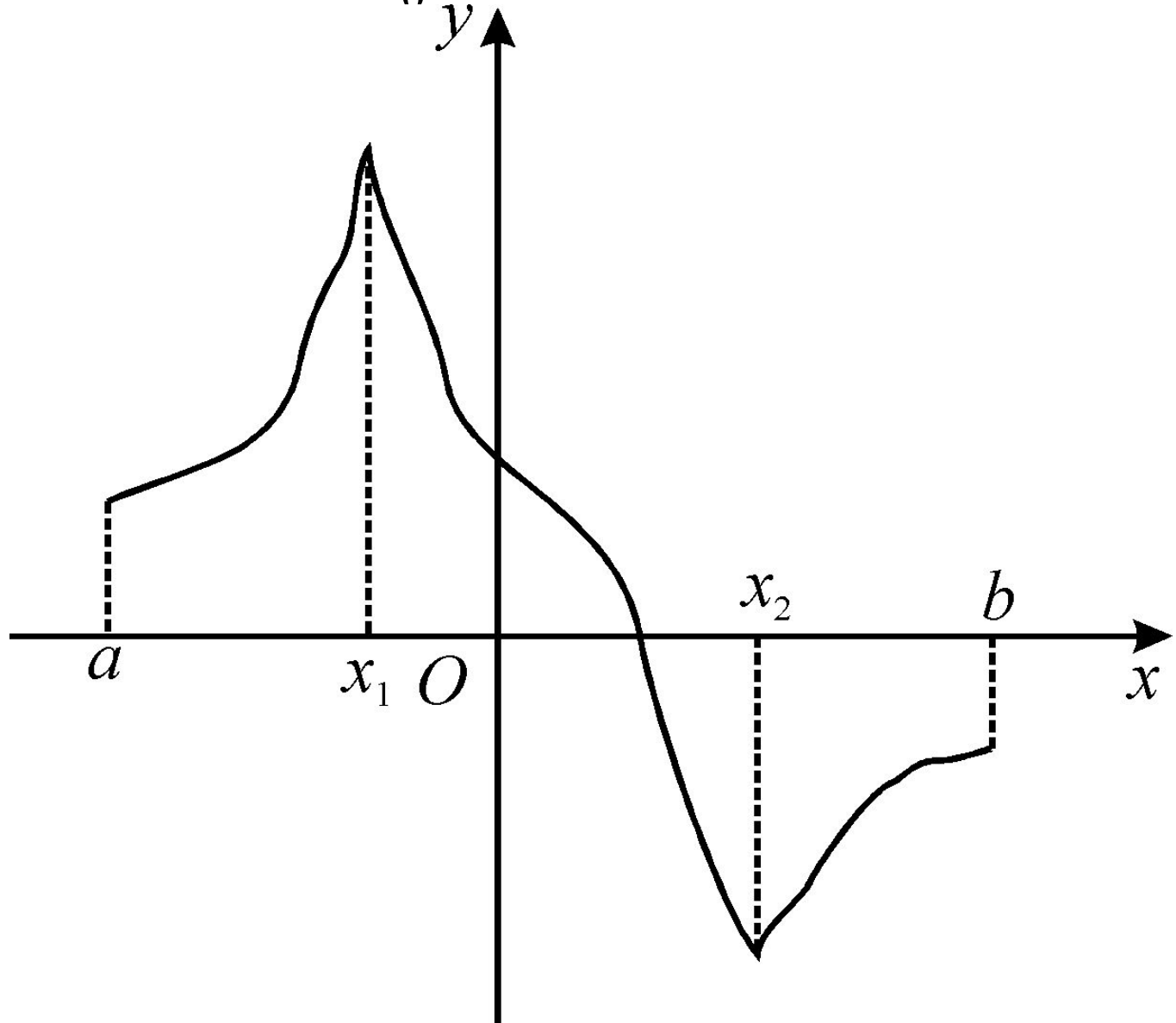
Геометрический смысл теоремы Ферма

Если внутренняя точка кривой наиболее или наименее удалена от оси OX , то касательная в этой точке, если она существует, параллельна оси OX , то есть, горизонтальна.



Замечание 1.

Производная в точке x_0 может и не существовать.

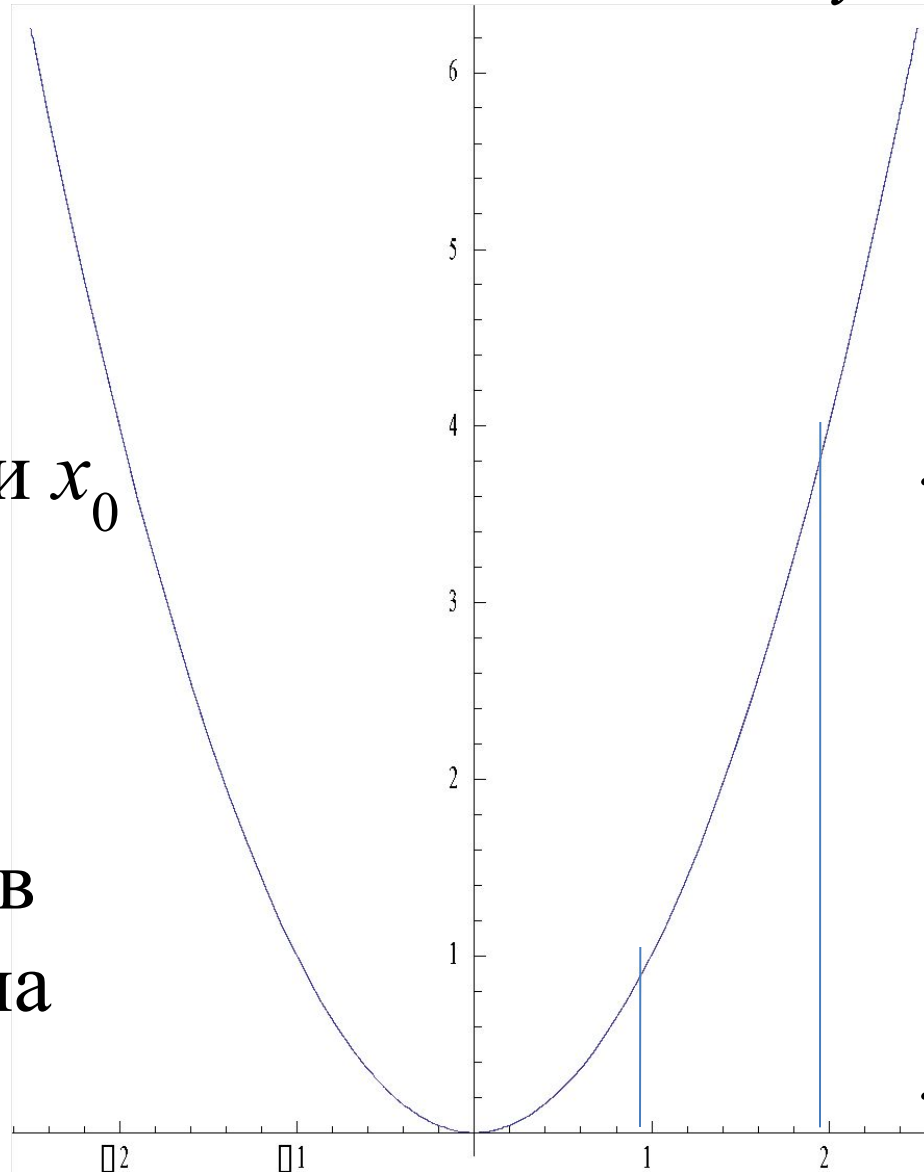


Замечание 2.

Условие, что точка x_0 внутренняя, является важным. Если x_0 не является внутренней точкой, то производная в ней не обязана быть равной нулю.

Пример

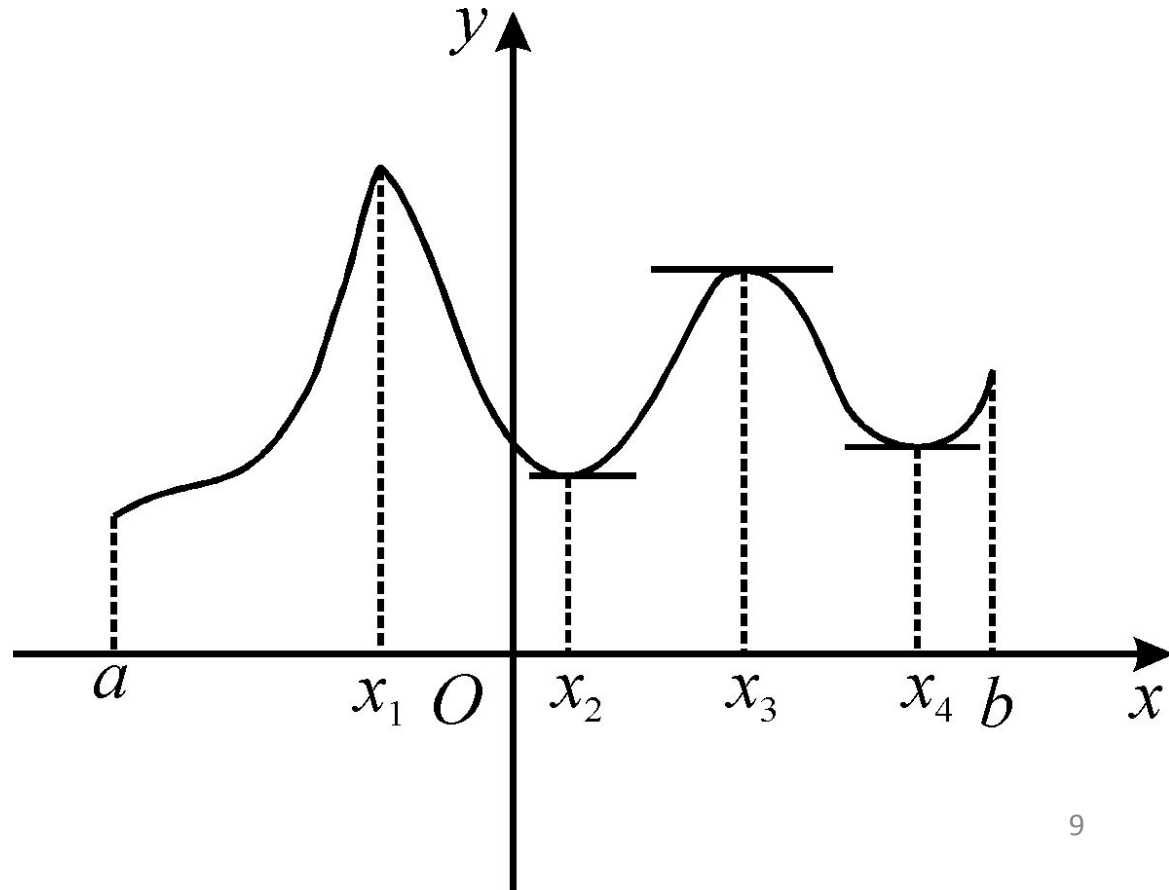
$$y = x^2 \text{ на } [1, 2]$$



$y' = 2x$
наибольшее
значение в
точке 2,
наименьшее
в точке 1.
 $y'(1) = 2 \neq 0$.
 $y'(2) = 4 \neq 0$.

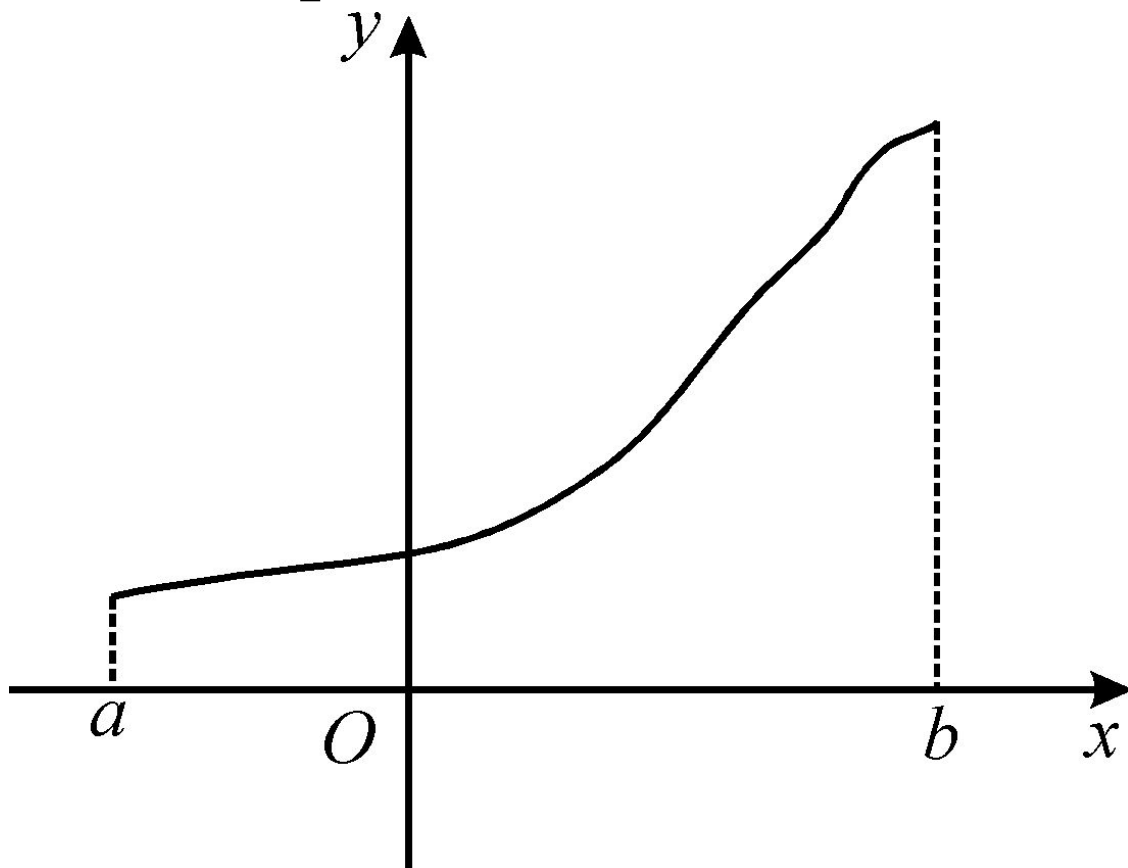
Определение. Пусть x_0 – внутренняя точка из $D(f)$ функции $y = f(x)$. Точка x_0 называется критической точкой этой функции, если производная $f'(x_0) = 0$, либо вовсе не существует. Те критические точки в которых производная $= 0$ называются стационарными.

x_2, x_3, x_4 –
стационарные
точки

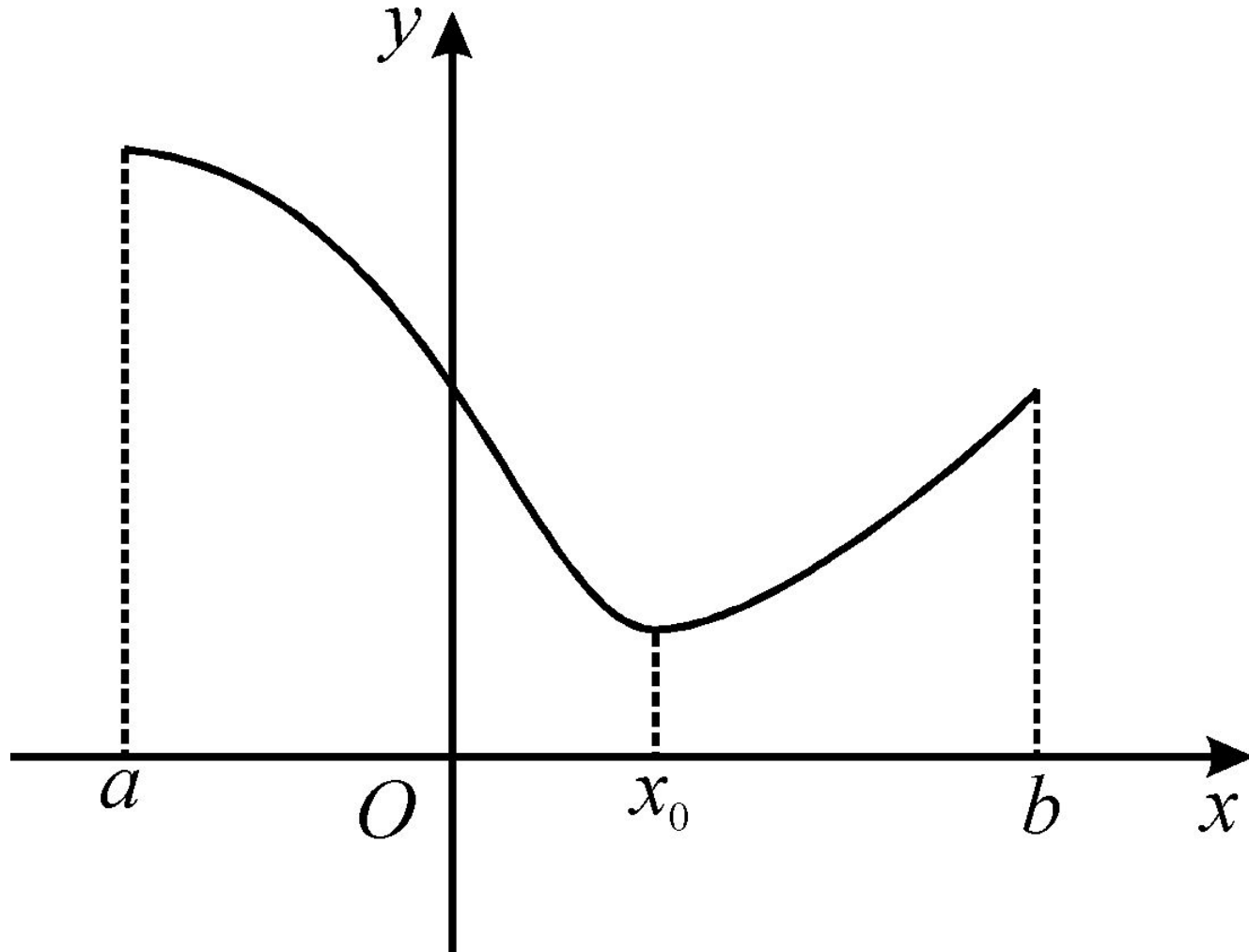


Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции

Пусть задана непрерывная функция $y = f(x)$ на $[a, b]$. Может случиться, что наибольшее или наименьшее значение принимается на концах этого отрезка.



Может случиться так, что наибольшее или наименьшее значение принимается внутри отрезка $[a, b]$ в точке x_0 .



Возможны два случая:

$a) f'(x_0)$ не существует $\Rightarrow x_0$ – критическая точка;

$b) f'(x_0)$ существует $\Rightarrow$ (по теореме Ферма)

$f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ – критическая стационарная точка.

Таким образом, внутренние точки, в которых достигается наибольшее или наименьшее значение нужно искать в критических точках.

Постановка задачи:

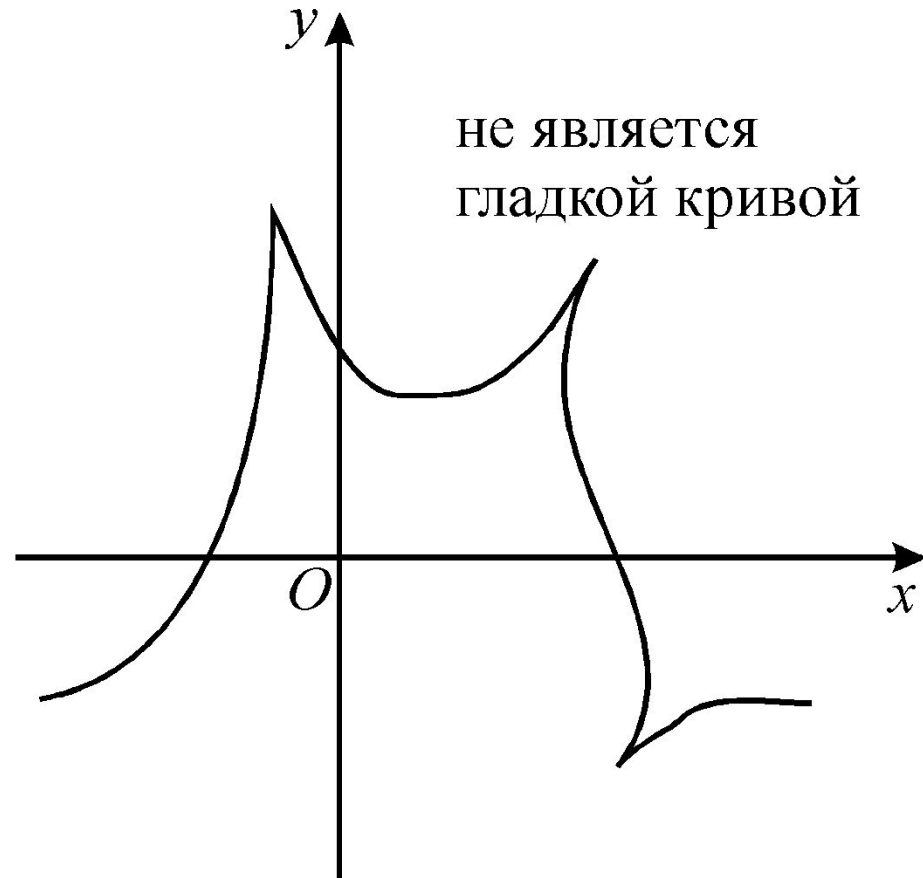
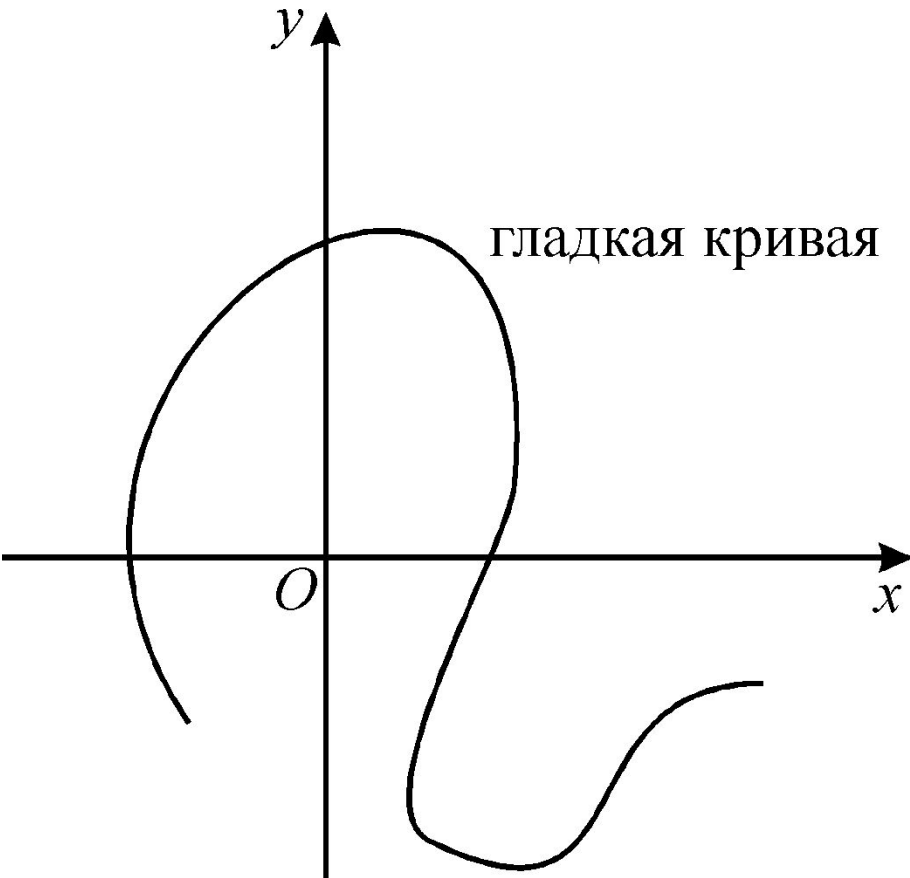
Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на $[a, b]$.

Исходя из предыдущих рассуждений, получаем алгоритм.

Алгоритм решения задачи:

- 1) Находим $f(a)$ и $f(b)$ – значения функции на концах отрезка.
- 2) Находим все критические точки данной функции на данном отрезке. Пусть это $x_1, x_2, \dots, x_n$ (в частности, их может и не быть).
- 3) Вычисляем $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.
- 4) Рассматриваем все полученные значения $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$ и выбираем из них наибольшее и наименьшее. Это и есть искомые значения.

Определение. Плоская кривая называется гладкой, если в каждой ее точке существует касательная.



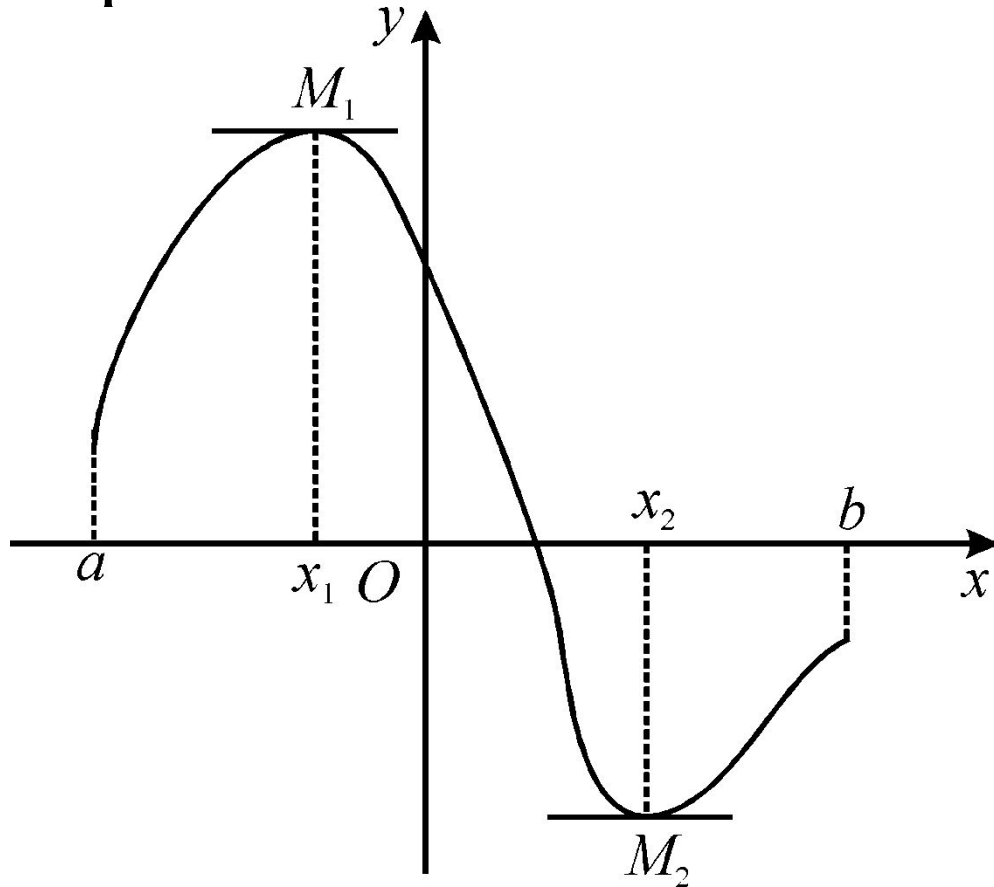
Теорема Ролля. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и удовлетворяет трем условиям:

- 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.
- 2) $f(x)$ дифференцируема на (a, b) .
- 3) $f(a) = f(b)$.

Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка x_0 , в которой $f'(x_0) = 0$.

Геометрический смысл теоремы Ролля:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ имеют одинаковые ординаты, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, касательная в которой горизонтальна.



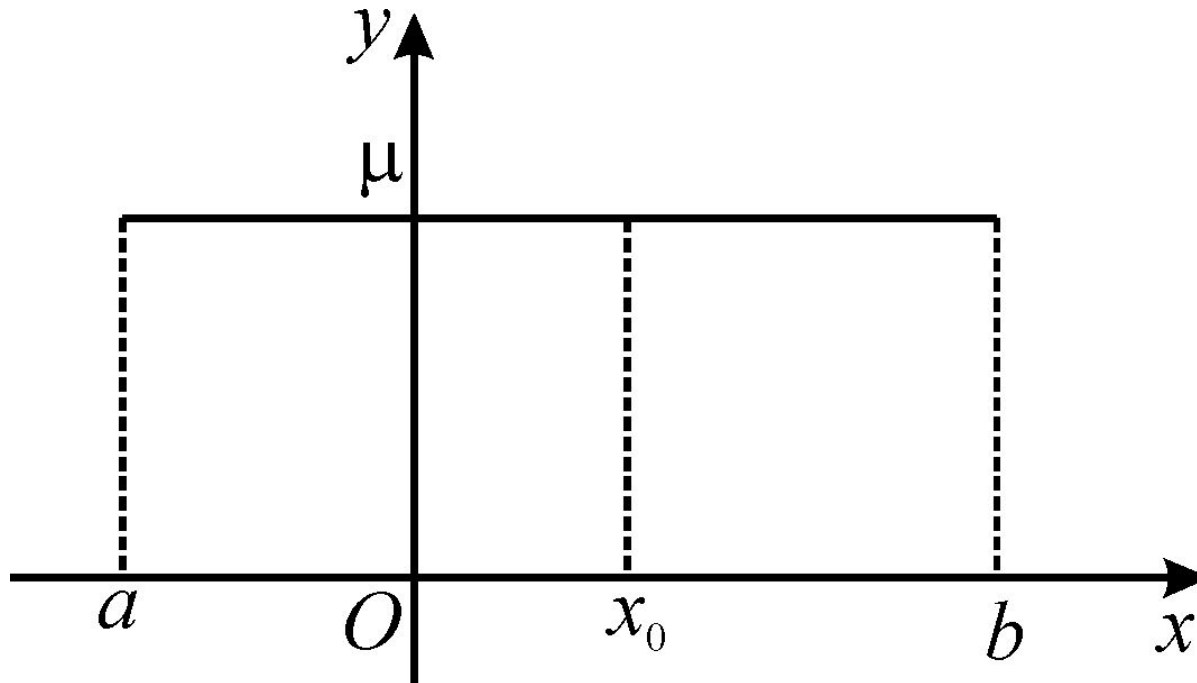
Доказательство

Возможны два случая:

a) функция на этом отрезке постоянна, т.е.

$$\forall x \in [a, b] (f(x) = f(a) = f(b) = \mu).$$

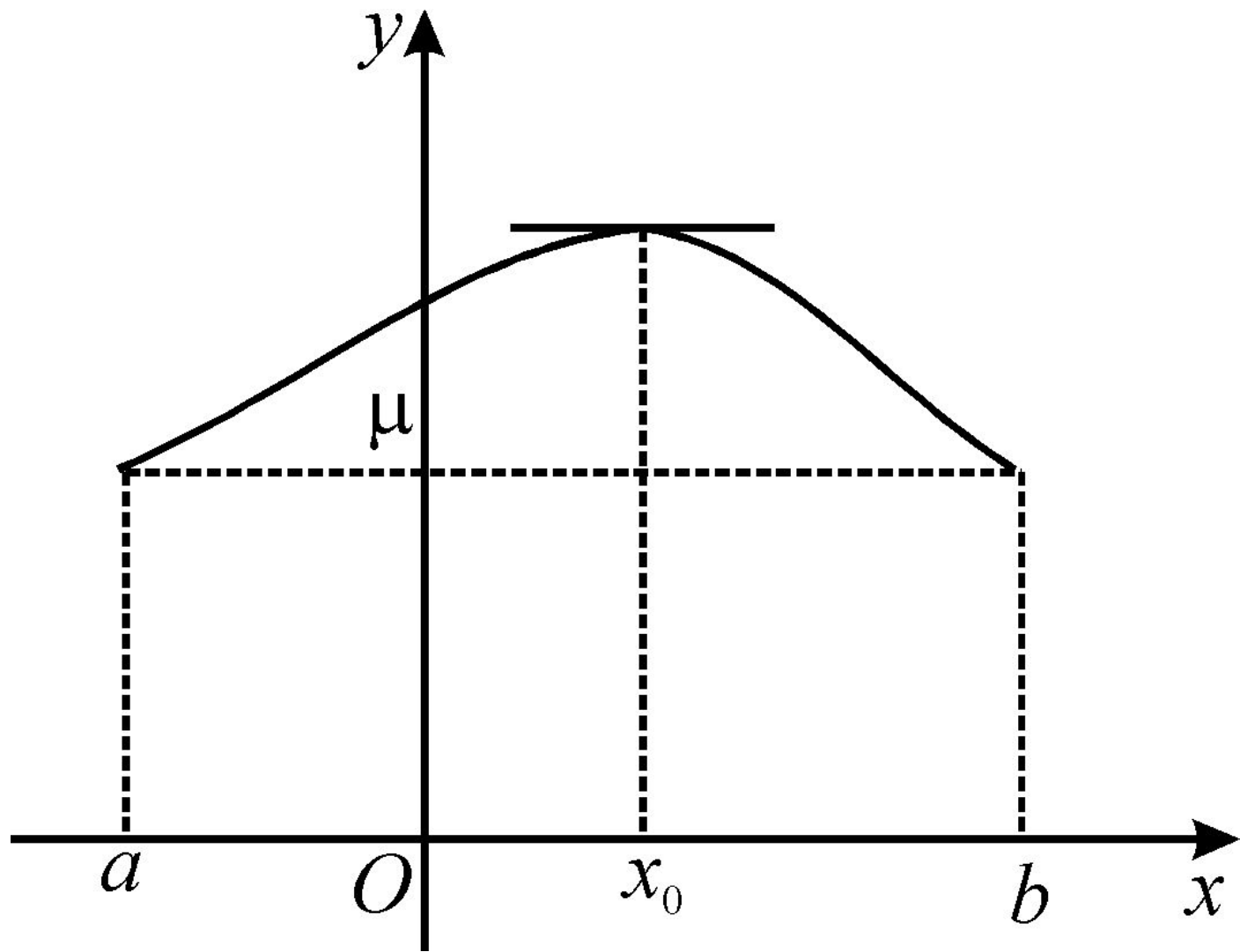
В этом случае роль точки x_0 может играть любая точка данного отрезка. Тогда $f'(x_0) = 0$ как производная константы.



b) функция не является постоянной на этом отрезке. В этом случае внутри $[a, b]$ эта функция принимает значения, отличные от $f(a) = f(b) = \mu$. Для определенности будем считать, что в некоторых внутренних точках функция принимает положительные значения (если отрицательные, то рассуждения аналогичны). Но тогда свое наибольшее значение функция принимает в некоторой внутренней точке x_0 больше μ .

По условию $f'(x_0)$ существует. Тогда по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$.

Что и требовалось доказать.



Теорема Лагранжа. Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и удовлетворяет двум условиям:

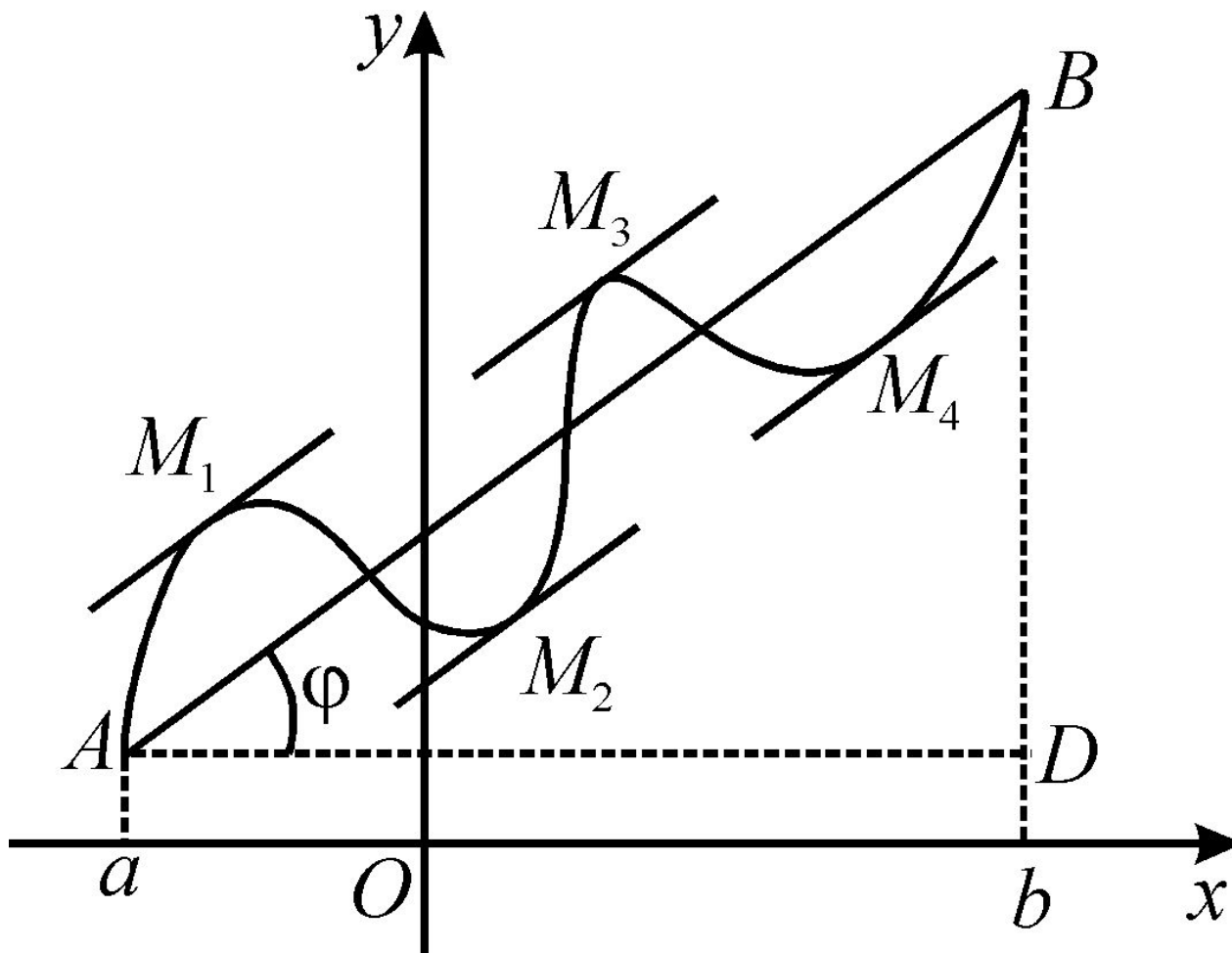
- 1) $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.
- 2) $f(x)$ дифференцируема на (a, b) .

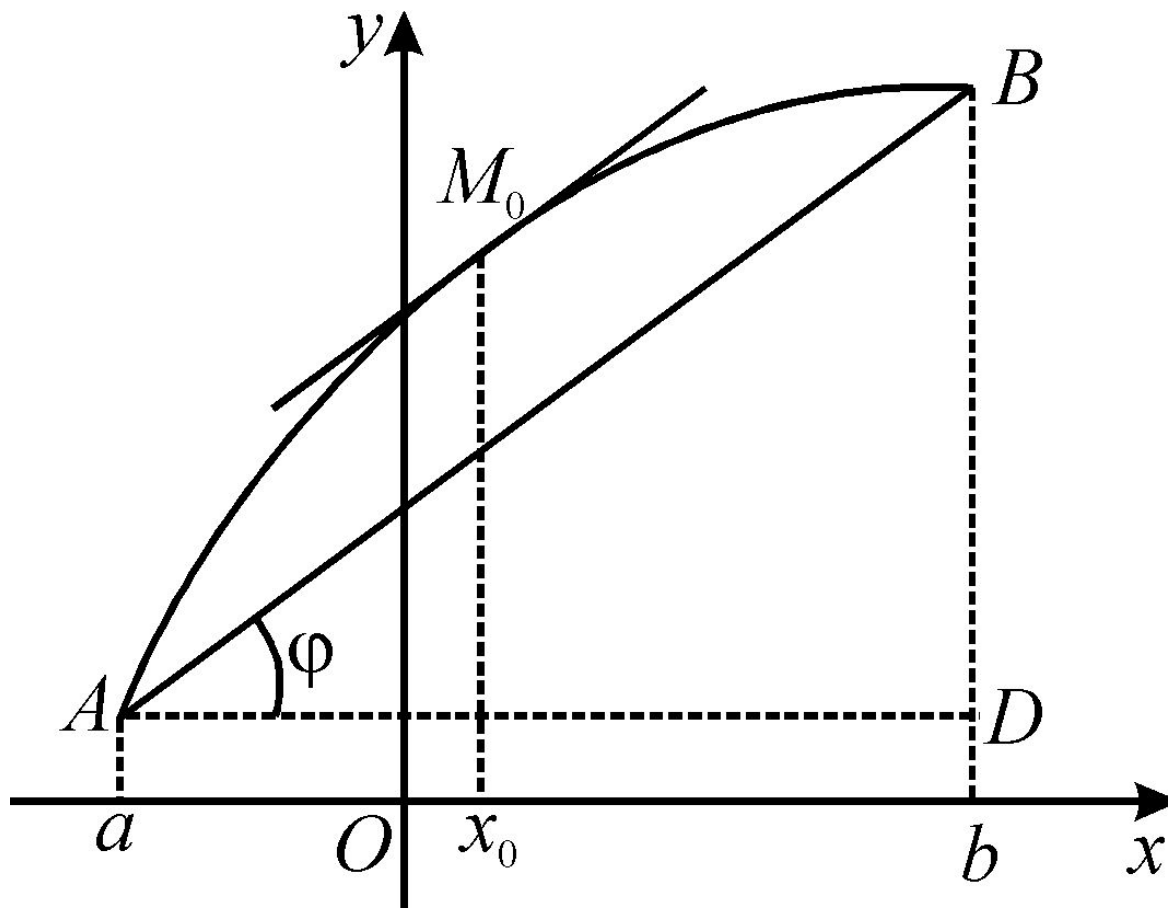
Тогда внутри отрезка $[a, b]$ найдется хотя бы одна точка x_0 , в которой:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Геометрический смысл теоремы Лагранжа:

Если концы гладкой кривой $y = f(x)$ соединить хордой, то на этой кривой найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна этой хорде.





Посмотрим, что значит параллельность касательной и хорды на рисунке.

То, что касательная и хорда параллельны, означает равенство угловых коэффициентов.

Пусть k_1 - угловой коэффициент касательной,
 k_2 - хорды.

$$k_1 = f'(x_0).$$

$$k_2 = \operatorname{tg} \phi = BD/AD = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Так как $k_1 = k_2$, следовательно:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0).$$

Или

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Доказательство теоремы Лагранжа

Рассмотрим вспомогательную функцию:

$$\phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Эта функция определена на отрезке $[a, b]$, и удовлетворяет трем условиям теоремы Ролля:

- 1) $\phi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ как сумма непрерывных на этом отрезке функций.
- 2) $\phi(x)$ дифференцируема на (a, b) . Действительно, ее производная существует и равна:

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

3) $\phi(a) = \phi(b)$. Действительно:

$$\phi(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (a - a) = 0.$$

$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (b - a) = 0.$$

Тогда по теореме Ролля найдется такая точка

$\exists x_0 \in (a, b)$, в которой $\phi'(x_0) = 0$, то есть:

$$\phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Или

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a).$$

Что и требовалось доказать.

Замечание.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, или иными словами теорема Лагранжа является обобщением теоремы Ролля. Действительно, в том частном случае, когда

$$f(b) = f(a)$$

из теоремы Лагранжа:

$$f(b) - f(a) = f'(x_0)(b - a),$$

следует, что $f'(x_0) = 0$.