Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 10.

Тема: Основные принципы комбинаторики.

Цель: Ознакомиться с основными принципами комбинаторики, основными определениями комбинаторики и примерами задач на данную тему.

Комбинаторика

- *Комбинаторика* – раздел математики, посвященный подсчету количеств разных комбинаций элементов некоторого, обычно конечного, множества
- *Комбинаторика* возникла в XVI веке. Первоначально комбинаторные задачи касались в основном азартных игр. Одним из первых занялся подсчетом числа различных комбинаций при игре в кости итальянский математик Тарталья. Теоретическое исследование вопросов комбинаторики предприняли в XVII веке французские ученые Паскаль и Ферма. Дальнейшие развитие комбинаторики связано с именами Якова Бернулли, Лейбница и Эйлера.

Принципы комбинаторики
Принцип сложения

- *<u>Основные принципы комбинаторики:</u>*
- Принцип сложения.
- Принцип умножения.

Принцип сложения

<u>Задача 1</u>: В классе 7 девочек и 8 мальчиков. Сколькими способами можно выбрать 1 человека для работы у доски?

Решение: Для работы у доски мы можем выбрать девочку 7 способами **или** мальчика 8 способами.

Общее число способов равно 7+8=15.

<u>Задача 2:</u> В классе 7 человек имеют «5» по математике, 9 человек – «5» по истории, 4 человека имеют «5» и по математике и по истории. Сколько человек имеют пятерку по математике или по истории?

Решение: Так как 4 человека входят и в семерку отличников по математике и в девятку отличников по истории, то сложив «математиков» и «историков», мы дважды учтем этих четверых, поэтому вычтя их один раз из суммы, получим результат 7+9-4=12.

Итак, 12 человек имеют пятерку по математике или по истории.

Принцип сложения

- Принцип сложения 1: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами и эти способы различны, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m***.

- Принцип сложения 2: Если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** можно получить ***m*** способами, то объект «***a или b***» можно получить ***n+m-k*** способами, где ***k*** – это количество повторяющихся способов.

Принцип умножения

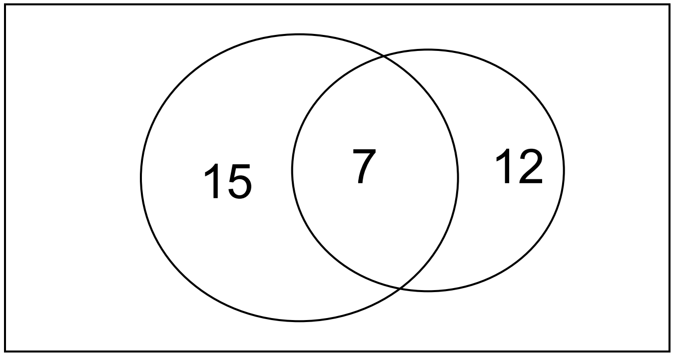
- **Задача**: На вершину горы ведут 5 дорог. Сколькими способами можно подняться на гору и спуститься с нее?
- **Решение:** Для каждого варианта подъема на гору существует 5 вариантов спуска с горы. Значит всего способов подняться на гору и спуститься с нее 5·5=25.
- Принцип умножения: если объект ***a*** можно получить ***n*** способами, объект ***b*** *можно получить* ***m*** способами, то объект ***«a и b»*** можно получить ***m·n*** способами.

Задачи

- 1) Из 10 коробок конфет, 8 плиток шоколада и 12 пачек печенья выбирают по одному предмету для новогоднего подарка. Сколькими способами это можно сделать?
- **Решение.** Коробку конфет можно выбрать 10 способами, шоколад – 8, печенье – 12 способами. Всего по принципу умножения получаем $10 \cdot 8 \cdot 12 = 960$ способов.

Задачи

- 2) В классе 24 человека. Из них 15 человек изучают английский язык, 12 – немецкий язык, 7 – оба языка. сколько человек не изучают ни одного языка?
- Решение. По принципу сложения 2 получим количество людей, изучающих английский или немецкий 15+12-7=20. Из общего числа учеников класса вычтем полученное количество людей. 24-20=4. 4 человека не изучает ни одного языка.



Задачи

- 1) Из двух спортивных обществ, насчитывающих по 20 боксеров каждое,

надо выделить по одному боксеру для участия в состязаниях. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По принципу умножения

$$20 \cdot 20 = 400$$

Задачи

- 2) Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную букву в слове «экзамен»?

Решение. В слове «экзамен» 3 гласные буквы и 4 согласные. По принципу умножения

$$3 \cdot 4 = 12$$

Задачи

- 3) В классе 20 человек, из них 9 человек изучают язык программирования Бейсик, и 8 человек изучают Паскаль. Сколько человек не изучают языки программирования, если известно, что других языков в этом классе не изучают и каждый человек знает не более одного языка программирования?

Решение. По принципу сложения получим, что 9+8=17 человек изучают языки программирования.

20-17=3 человека не изучают языки программирования.

Задачи

- 4) От дома до школы существует 6 маршрутов. Сколькими способами можно дойти до школы и вернуться, если дорога «туда» и «обратно» идет по разным маршрутам?

Решение. По принципу умножения

$$6 \cdot 5 = 30$$

Задачи

- 5) Из 3 экземпляров учебника алгебры, 5 экземпляров учебника геометрии и 7 экземпляров учебника истории нужно выбрать по одному экземпляру каждого учебника. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. По принципу умножения

$$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

Задачи

- 6) В корзине лежат 15 яблок и 10 апельсинов. Яша выбирает из нее яблоко или апельсин, после чего Полина берет яблоко и апельсин. В каком случае Полина имеет большую свободу выбора: если Яша взял яблоко или если он взял апельсин?

Решение. Если Яша взял яблоко, то по принципу умножения Полина может осуществить свой выбор $14 \cdot 10 = 140$ способами. Если Яша взял апельсин, то - $15 \cdot 9 = 135$ способами.

В первом случае у Полины свобода выбора большая.

ВГУЭС

Размещения

- **Определение 1**

Размещением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n.

Пример

Дано множество $A = \{a; b; c\}$. Составим все 2-размещения этого множества.

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b)$$

Число размещений

- **Теорема 1** Число всех размещений из n элементов по k вычисляется по формуле
$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1).$$

- **Доказательство.** Каждое размещение можно получить с помощью k действий:
- 1) выбор первого элемента n способами;
- 2) выбор второго элемента (n-1) способами;
- и т. д.
- k) выбор k –го элемента (n-(k-1))=(n-k+1) способами.

По правилу умножения число всех размещений будет n(n-1)(n-2)…(n-k+1). Теорема доказана.

Число размещений

- **Замечание.** Формулу для числа размещений можно записать в виде

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- Действительно

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{(n-k)!(n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot\ldots\cdot(n-1)n.$$

Пример

- Абонент забыл последние 3 цифры номера телефона. Какое максимальное число номеров ему нужно перебрать, если он вспомнил, что эти последние цифры разные?
- **Решение.**

Задача сводится к поиску различных перестановок 3 элементов из 10 (так как всего цифр 10). Применим формулу для числа перестановок.

$$A_{10}^{3} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7!} = 720$$

Размещения с повторениями

- **Определение 2**

Размещением с повторением из n элементов по k называется всякая перестановка из k элементов, выбранных каким-либо способом из данных n элементов возможно с повторениями.

- **Пример**

Дано множество $A = \{a; b; c\}$

Составим 2- размещения с повторениями:

$$(a;b);(b;a);(a;c);(c;a);(b;c);(c;b);(a;a);(b;b);(c;c)$$

Число размещений с повторениями

Теорема 2. Число k- размещений с повторениями из n элементов вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^k = n^k$$

Доказательство. Каждый элемент размещения можно выбрать n способами. По правилу умножения число всех размещений с повторениями равно

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k.$$

Пример

- Сколько существует номеров машин?

- Решение. Считаем, что в трех буквах номера машины не используются буквы «й», «ы», «ь», «ъ», тогда число перестановок букв равно
  . $$\overline{A}_{29}^{3} = 29^{3}$$

Число перестановок цифр равно $\overline{A}_{10}^{3} = 10^{3}$.

По правилу умножения получим число номеров машин $$\overline{A}_{10}^{3} \cdot \overline{A}_{29}^{3} = 29^{3} \cdot 10^{3} = 24389000$$

Перестановки

- **Определение 1**

Перестановкой из n элементов называется всякий способ нумерации этих элементов

Пример 1

Дано множество $A=\{a;b;c\}$. Составить все перестановки этого множества.

Решение. $(a;b;c);(a;c;b);(b;a;c);(b;c;a);(c;a;b);(c;b;a)$

Число перестановок

- **Теорема 1.** Число всех различных перестановок из n элементов равно n!
- **Замечание.**

$n!$ читается «n факториал» и вычисляется по формуле

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

- Например, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6,$

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120,$$

- Считают, что 0!=1

Число перестановок

- Доказательство теоремы 1.
- Любую перестановку из n элементов можно получить с помощью n действий:

1) выбор первого элемента n различными способами,
2) выбор второго элемента из оставшихся (n-1) элементов, т.е. (n-1) способом,
3) выбор третьего элемента (n-2) способами,

……

n) выбор n-го элемента 1 способом.

По правилу умножения число всех способов выполнения действий, т.е. число перестановок, равно

$$n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

Теорема доказана.

Перестановки

- Число всех перестановок обозначается P_n
- Итак, $P_n = n!$

Пример

В команде 6 человек. Сколькими способами они могут построиться для приветствия?

Решение

Число способов построения равно числу перестановок 6 элементов, т.е.

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$$

Перестановки с повторениями

Теорема 2

- Число перестановок n – элементов, в котором есть одинаковые элементы, а именно n_i элементов *i* –того типа $(i = 1,2,\dots,k)$ вычисляется по формуле

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_k)!}{n_1! n_2! \dots n_k!},$$

где $$n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$$

Доказательство. Так как перестановки между одинаковыми элементами не изменяют вид перестановки в целом, количество перестановок всех элементов множества нужно разделить на число перестановок одинаковых элементов.

Пример

- **<u>Задача</u>:** Сколько слов можно составить, переставив буквы в слове «экзамен», а в слове «математика»?
- **Решение:** В слове «экзамен» все буквы различны, поэтому используем формулу для числа перестановок без повторений

$$P_7 = 7! = 5040.$$

- В слове «математика» 3 буквы «а», 2 буквы «м», 2 буквы «т», поэтому число перестановок всех букв разделим на число перестановок повторяющихся букв:

$$P(2,3,2,1,1,1) = \frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 151200$$

Задачи

- 1)Сколькими способами можно составить список из 8 учеников, если у них различные инициалы?
- **Решение**

Задача сводится к подсчету числа перестановок ФИО.

$$P_8 = 8! = 40320$$

Задачи

- 2)Сколькими способами можно составить список 8 учеников, так, чтобы два указанных ученика располагались рядом?
- **Решение**

Можно считать двоих указанных учеников за один объект и считать число перестановок уже 7 объектов, т.е. $P_7 = 7! = 5040$

Так как этих двоих можно переставлять местами друг с другом, необходимо умножить результат на 2!

$$P_7 \cdot 2! = 7! \cdot 2! = 5040 \cdot 2 = 10080$$

Задачи

- 3) Сколькими способами можно разделить 11 спортсменов на 3 группы по 4, 5 и 2 человека соответственно?
- **Решение.** Сделаем карточки: четыре карточки с номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3. Будем раздавать эти карточки с номерами групп спортсменам, и каждый способ раздачи будет соответствовать разбиению спортсменов на группы. Таким образом нам необходимо посчитать число перестановок 11 карточек, среди которых четыре карточки с одинаковым номером 1, пять карточек с номером 2 и две карточки с номером 3.

$$P(4,5,2) = \frac{11!}{4!5!2!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 1\cdot 2} = 6930$$

Задачи

4) Сколькими способами можно вызвать по очереди к доске 4 учеников из 7?

Решение. Задача сводится к подсчету числа размещений из 7 элементов по 4

$$A_7^4 = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840$$

Задачи

- 5)Сколько существует четырехзначных чисел, у которых все цифры различны?
- **Решение.** В разряде единиц тысяч не может быть нуля, т.е возможны 9 вариантов цифры.

  В остальных трех разрядах не может быть цифры, стоящей в разряде единиц тысяч (так как все цифры должны быть различны), поэтому число вариантов вычислим по формуле размещений без повторений из 9 по 3

$$A_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

$$9 \cdot A_9^3 = 4536$$

По правилу умножения получим

Задачи

- 6)Сколько существует двоичных чисел, длина которых не превосходит 10?
- **Решение.** Задача сводится к подсчету числа размещений с повторениями из двух элементов по 10

$$\overline{A}_2^{10} = 2^{10} = 1024$$

Задачи

- 7)В лифт 9 этажного дома зашли 7 человек. Сколькими способами они могут распределиться по этажам дома?
- **Решение.** Очевидно, что на первом этаже никому не надо выходить. Каждый из 7 человек может выбрать любой из 8 этажей, поэтому по правилу умножения получим

$$\underbrace{8\cdot 8\cdot \ldots \cdot 8}_{7} = 8^7 = 2097152$$

- Можно так же применить формулу для числа размещений с повторениями из 8 (этажей) по 7(на каждого человека по одному этажу)

$$\overline{A}_8^7 = 8^7$$

ВГУЭС

Задачи

- 8)Сколько чисел, меньше 10000 можно написать с помощью цифр 2,7,0?
- **Решение.** Так как среди цифр есть 0, то, например запись 0227 соответствует числу 227, запись 0072 соответствует числу 72, а запись 007 соответствует числу 7. Таким образом, задачу можно решить, используя формулу числа размещений с повторениями

$$\overline{A}_3^4 = 3^4 = 81$$

- **Вопросы:**
- Является ли перестановка – размещением?
- Сравнить выражения A_7^3 и A_3^7
- Перечислите основные принципы комбинаторики.
- Сколькими способами могут совершить обмен 1 диска два студента, если у одного 7 дисков, а у другого 5?