

*ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И
НЕСОБСТВЕННЫЙ
ИНТЕГРАЛЫ.*

Определенный интеграл.

Определенным интегралом функции

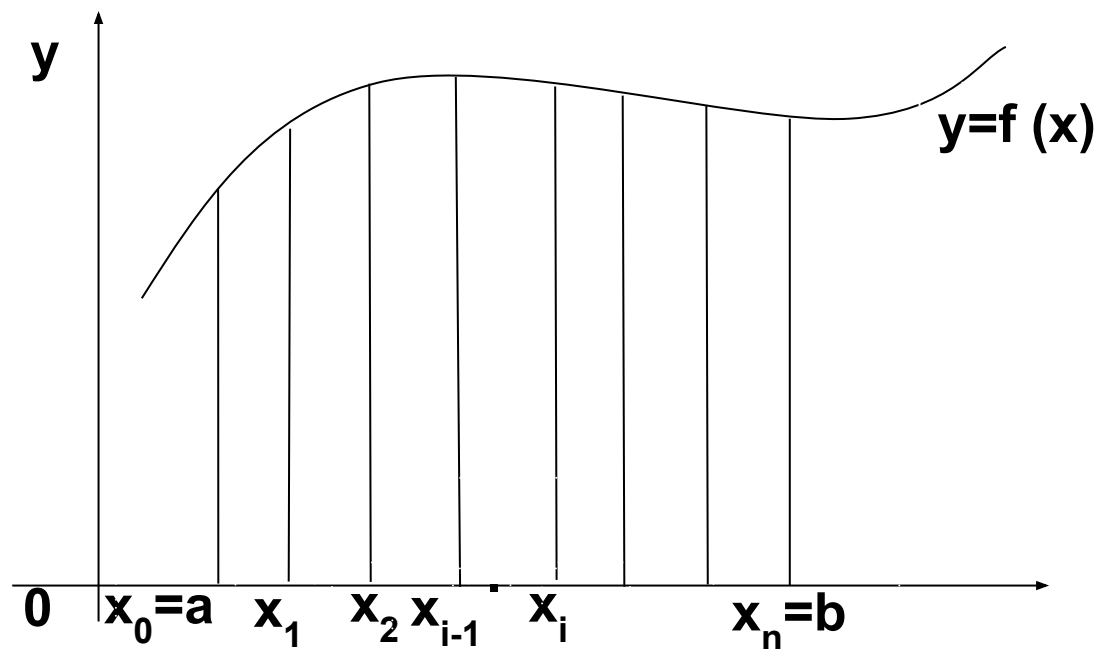
$y=f(x)$ на $[a,b]$ называется $\lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ (n \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i,$

если этот предел существует и не зависит от способа разбиений $[a,b]$ на Δx_i и от выбора точек ξ_i . Определенный интеграл

обозначается: $\int_a^b f(x)dx$. Числа a и b

называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Геометрический смысл определённого интеграла.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Свойства определённого интеграла.

$$1. \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \qquad 2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx, \text{ } k\text{-любое число}$$

$$4. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \\ + \int_a^b f_2(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$$

5. Аддитивность определённого интеграла. Для любых чисел a, b, c справедливо:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница.

Если $F(x)$ есть какая-либо первообразная от непрерывной на $[a, b]$ функции $f(x)$, то справедлива формула

Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Пример.

$$\int_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{0,5} = \arcsin 0,5 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$$

Замена переменной в определённом интеграле.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt =$$
$$= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$x = \sin t$$

$$t = \arcsin x$$

x	0	1
t	0	$\frac{\pi}{2}$

Интегрирование по частям в определённом интеграле.

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

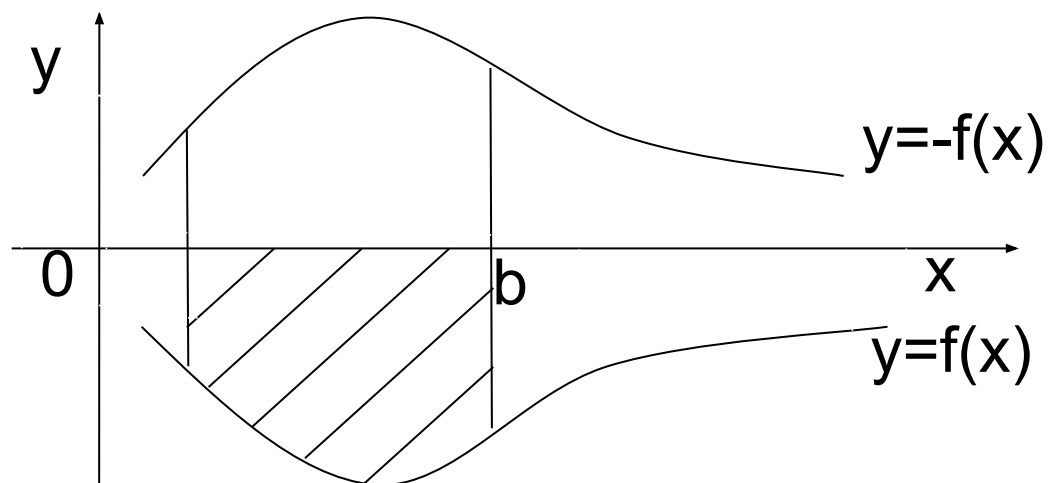
Пример.

$$\int_0^{\pi} x \cdot \cos x dx = x \cdot \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2$$

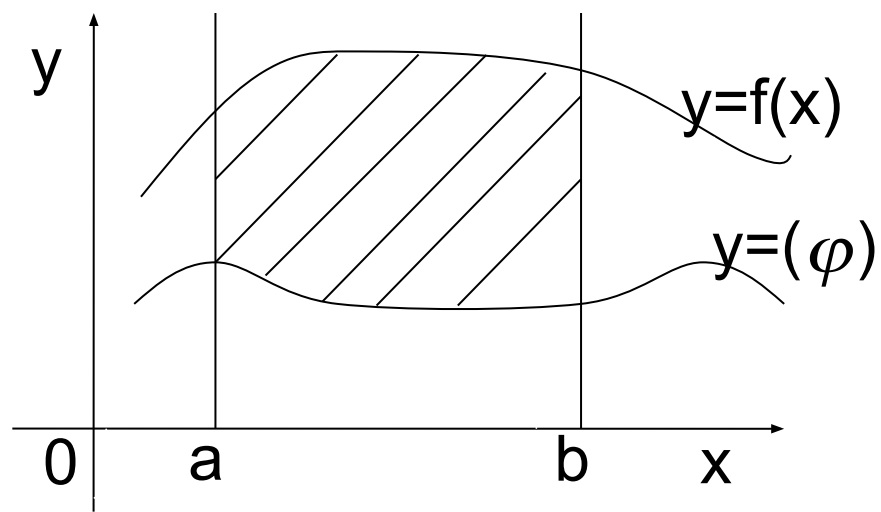
$$u = x, \cos x dx = dv$$

$$du = dx, v = \sin x$$

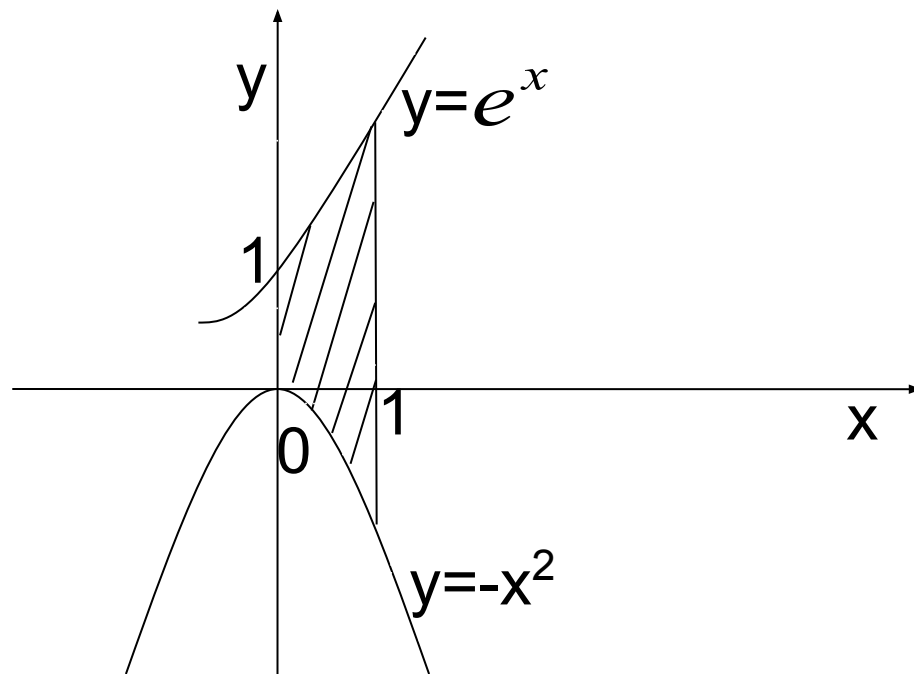
*Геометрические приложения
определенного интеграла.*



$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$



$$S = \int_a^b [f(x) - \varphi(x) dx]$$

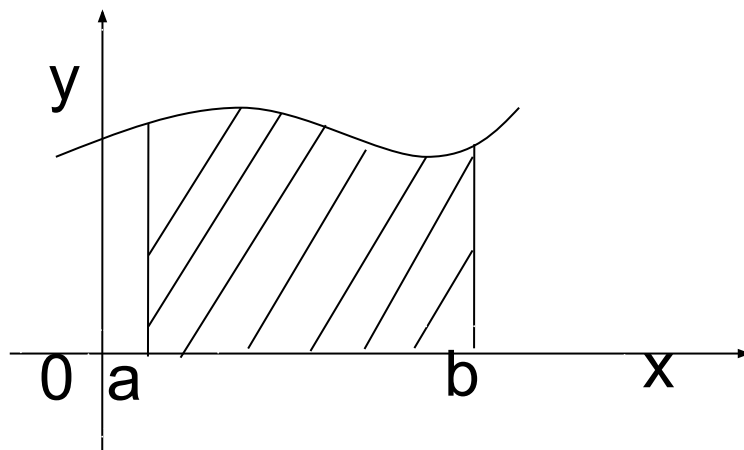


$$S = \int_0^1 (e^x + x^2) dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e - 1 + \frac{1}{3} = e - \frac{2}{3}$$

Площадь криволинейной
трапеции, ограниченной кривой,
заданной параметрически.

$$\begin{cases} x = x(t), \text{ где } \alpha \leq t \leq \beta, x(\alpha) = a, x(\beta) = b, \\ y = y(t) \end{cases}$$

$x(t), y(t), x'(t), y'(t)$ – непрерывны $[\alpha, \beta]$.
на

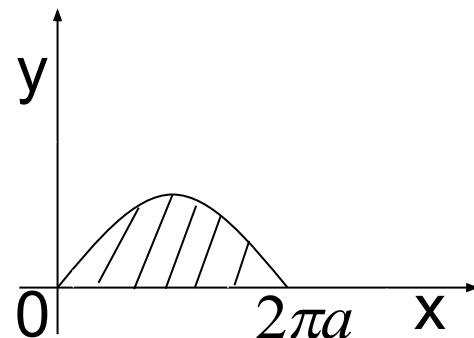


$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t) dt$$

Пример.

Найти площадь фигуры, ограниченной осью ОХ и одной аркой

циклоиды: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.



$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} a \cdot (1 - \cos x) \cdot a \cdot (t - \sin t)' dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt = a^2 (t - 2\sin t) \Big|_0^{2\pi} + \\ &+ a^2 \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t) dt = a^2 \cdot 2\pi + \frac{a^2}{2} (t + \frac{1}{2} \sin 2t) \Big|_0^{2\pi} = \\ &= 2\pi \cdot a^2 + \frac{a^2}{2} \cdot 2\pi = 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Вычисление длины дуги
кривой.

Пусть кривая задана уравнением $y=f(x)$,
где $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на $[a, b]$.

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Пусть кривая задана в параметрической форме $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$, причём $x(t)$, $y(t)$, $x'(t) \neq 0$, $y'(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Несобственный интеграл.

Если существует конечный $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx$

($b > a$), то этот предел называется
несобственным интегралом функции $f(x)$
на промежутке $[a; +\infty)$ и обозначают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx$$

Пример.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg x \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \arctg b - \arctg 0 = \frac{\pi}{2}$$

*Функции нескольких
переменных.*

Определение

Функцией двух переменных называется правило, по которому каждой упорядоченной паре чисел $(x; y)$, принадлежащей множеству M , ставится в соответствие единственное действительное число z , принадлежащее множеству L . Множество M называется областью определения функции. Множество L называется областью значения функции при условии, что каждое $z \in L$ соответствует хотя бы одной паре $(x; y) \in M$. Функцию двух переменных обозначают: $z = f(x; y)$.

Частные производные.

Частные производные по x .

Предел $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x},$

если он существует, называется частной производной (I порядка) функции $z=f(x,y)$ по x в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0); \quad f'_x(x_0, y_0); \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Частные производные по y .

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$$

называется частной производной

(I порядка) функции $z=f(x,y)$ по y в точке (x_0, y_0) и обозначается:

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0); \quad f'_y(x_0, y_0); \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Частные производные высших порядков.

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

Пример.

$z = x^2 y^3$. Вычислить частные производные II порядка функции.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cdot y^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 \cdot y^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x^2 \cdot y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 6xy^2.$$

Полный дифференциал.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Скалярное поле.

Часть пространства или всё пространство, в каждой точке $p(x,y,z)$ которого задана скалярная функция $U=F(x, y, z)=F(p)$, называется скалярным полем, а функция $U= F(p)$ называется функцией поля.

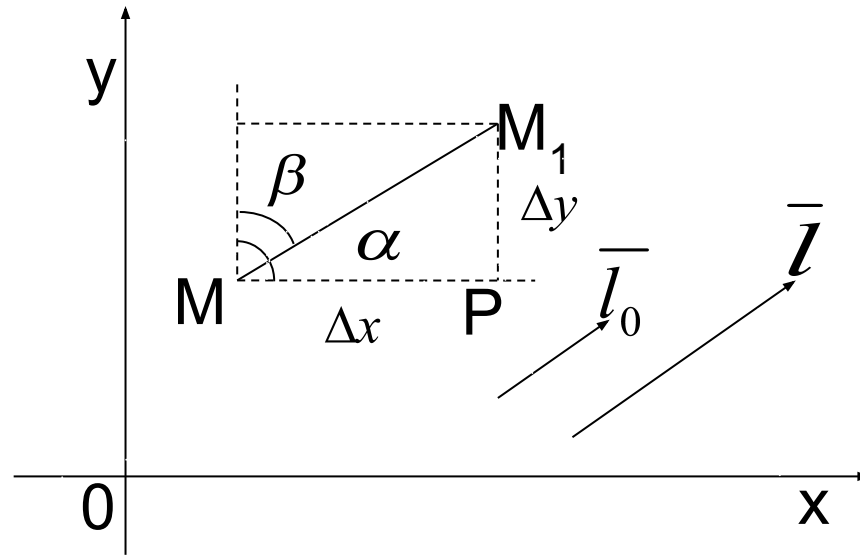
Пример.

Найти полный дифференциал функции $z = x y^2$ в произвольной точке.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy.$$

Следовательно $dz = y^2 dx + 2xy dy$.

Производная по направлению.



$$\frac{\partial z}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta$$

Градиент

$$\textit{grad}U = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \vec{k}$$

*Экстремумы функции двух
переменных.*

Необходимое условие существования экстремума.

Пусть функция $z=f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ имеет экстремум и пусть существует $f'_x(x_0, y_0)$ и $f'_y(x_0, y_0)$.

Тогда $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Достаточное условие существования экстремума.

Пусть для функции $z=f(x, y)$ в критической точке $P_0(x_0, y_0)$ существуют производные $f_{xx}''(P_0)$, $f_{yy}''(P_0)$, $f_{xy}''(P_0)$. Выражение $f_{xx}''(P_0) \cdot f_{yy}''(P_0) - [f_{xy}''(P_0)]^2 = \Delta(P_0)$ назовём дискриминантом функции $z=f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$.

Возможны три случая:

1) $\Delta(P_0) > 0$, тогда точка P_0 — точка экстремума:

при $f_{xx}''(P_0) > 0$ — точка минимума;

при $f_{xx}''(P_0) < 0$ — точка максимума.

2) $\Delta(P_0) < 0$, тогда P_0 не является точкой экстремума.

Пример исследовать на экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$$

Решение. $f'_x = 3x^2 + y^2 - 15$; $f'_y = 6xy - 12$

Решая систему $\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases}$ получим четыре

стационарные точки $P_1(1,2)$; $P_2(2,1)$;
 $P_3(-1,-2)$; $P_4(-2,-1)$.

Продолжение примера.

Проверим достаточное условие экстремума в каждой из точек.

$$f''_{xx} = 6x; \quad f''_{xy} = 6y; \quad f''_{yy} = 6x.$$

$$\Delta = A \cdot C - B^2$$

1) Для точки $P_1(1,2)$: $A = f''_{xx}(P_1) = 6$;

$$B = f''_{xy}(P_1) = 12; \quad C = f''_{yy}(P_1) = 6; \quad \Delta = 6 \cdot 6 - 12^2 < 0.$$

Значит, в точке P_1 экстремума нет.

1) Для точки $P_2(2,1)$: $\Delta > 0$, $A > 0$.

В точке P_2 функция имеет минимум.

$$f_{\min} = f(P_2) = -28$$

Аналогично, проверяют точки P_3 и P_4 .