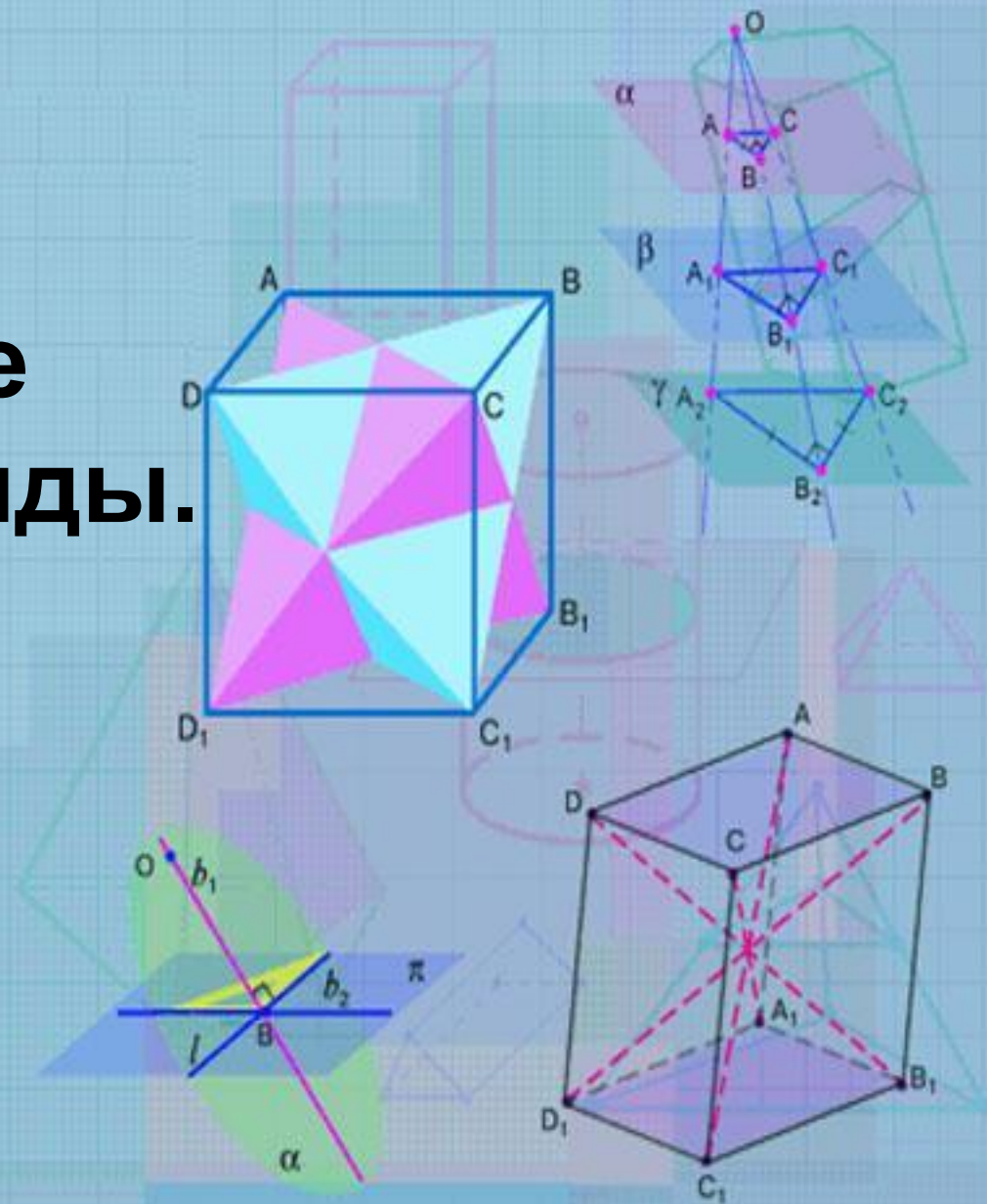


Определение призмы, пирамиды.

Геометрия, 10 класс.

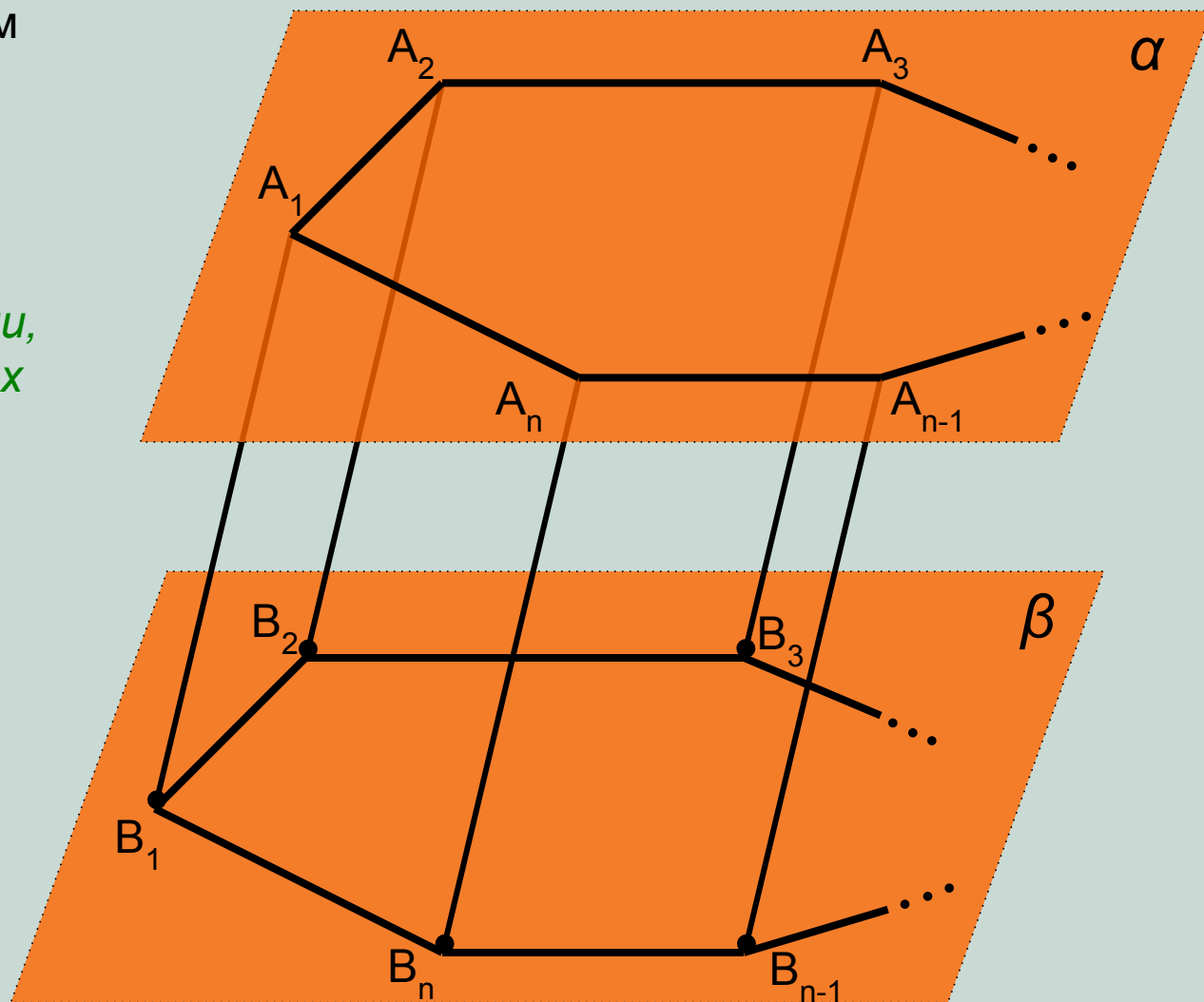


Пусть даны две параллельные плоскости α и β . Построим в плоскости α произвольный n -угольник $A_1A_2\dots A_n$.
 Через его вершины проведем параллельные прямые, пересекающие плоскость β в соответствующих точках $B_1, B_2, \dots, B_n$.

Соединив последовательно полученные точки получим n -угольник $B_1B_2\dots B_n$.

*Многогранник,
 образованный двумя
 равными многоугольниками,
 лежащими в параллельных
 плоскостях и n
 параллелограммами
 является n -угольной
 призмой.*

Обозначается призма
 перечислением всех точек,
 участвующих в ее
 построении, в нашем
 случае: $A_1A_2\dots A_n B_1B_2\dots B_n$.



Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются **основаниями** призмы (или верхней и нижней гранями n-угольной призмы).

Параллелограммы $A_1B_1B_nA_n$, $A_1B_1B_2A_2$, ..., $A_nB_nB_{n-1}A_{n-1}$ – **боковые грани** призмы.

Параллельные и равные между собой отрезки A_1B_1 , $A_2B_2, ..., A_nB_n$ – **боковые ребра** призмы.

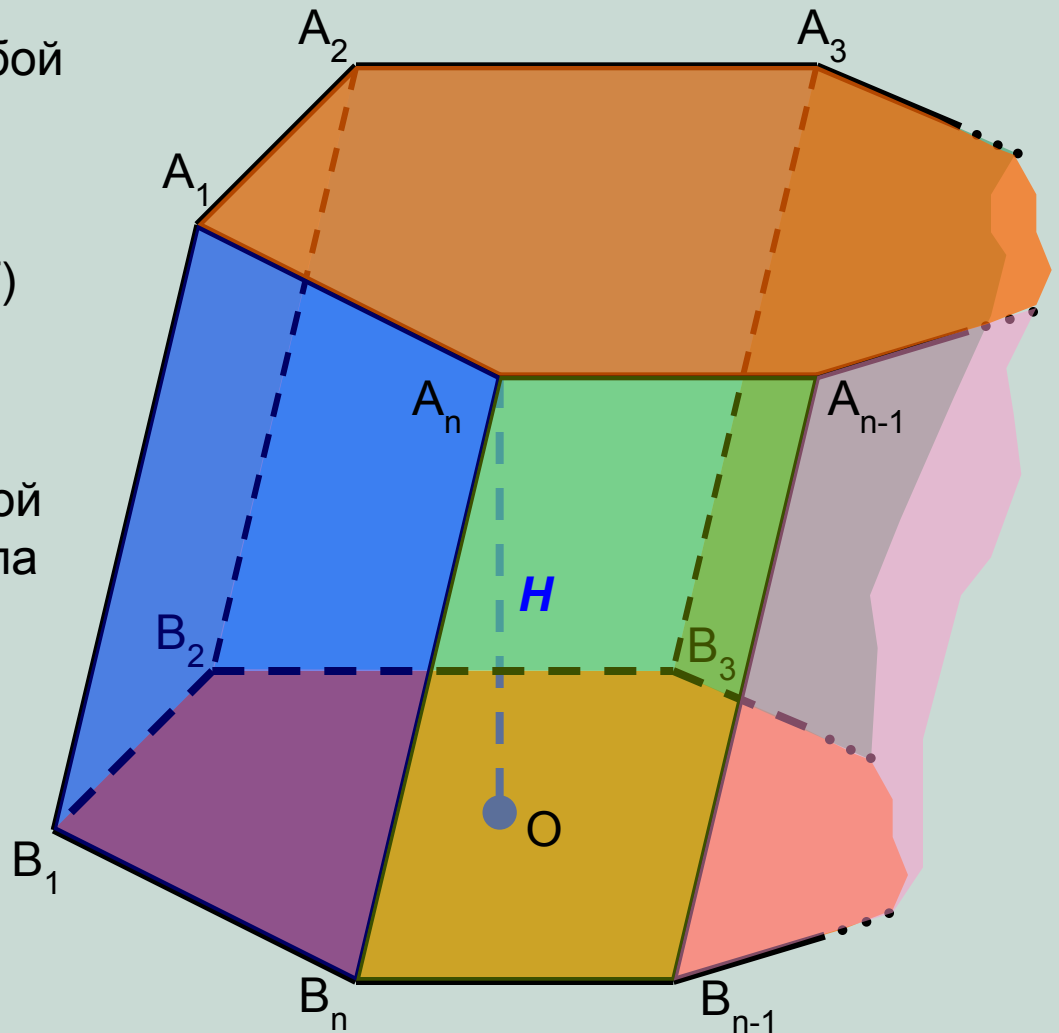
Можно установить, что для любой n-угольной призмы:

- 1) количество вершин – $2n$; (В)
- 2) количество граней – $(n+2)$; (Г)
- 3) количество ребер – $3n$; (Р)

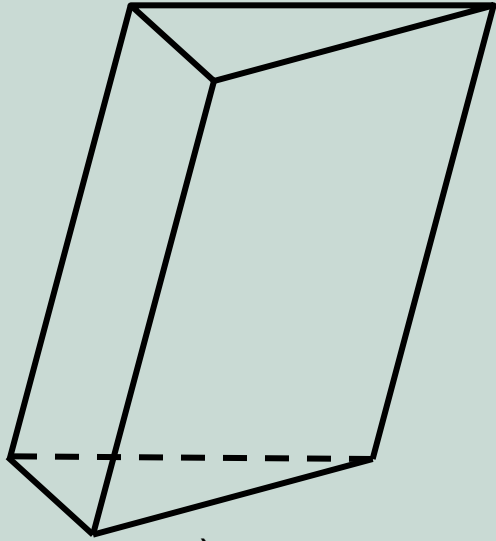
и поэтому, как для любого многогранника, для n-угольной призмы выполняется формула Эйлера:

$$B + \Gamma - P = 2.$$

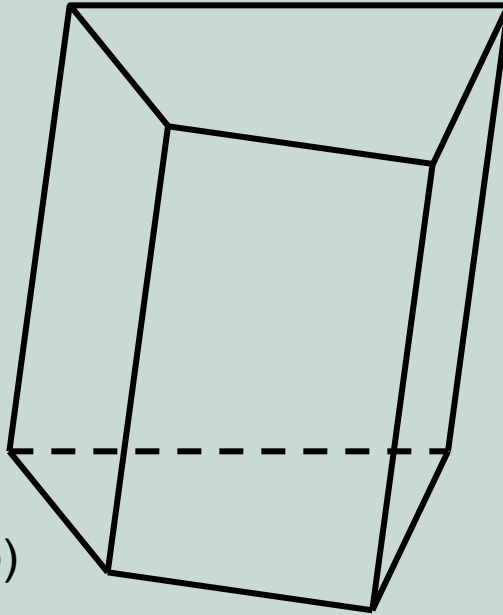
Отрезок $A_nO \perp (B_1B_2B_3)$ – **высота** призмы.



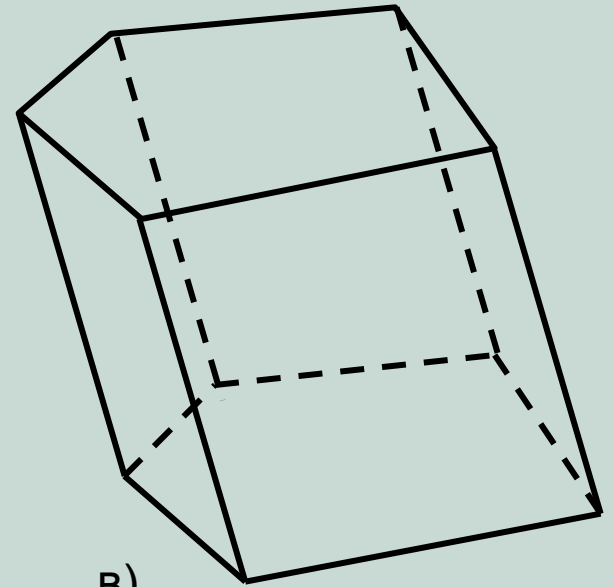
Название призмы определяется количеством сторон в основании фигуры. Например, на рисунке представлены треугольная (а), четырехугольная (б), пятиугольная (в), шестиугольная (г) и семиугольная (д) призмы:



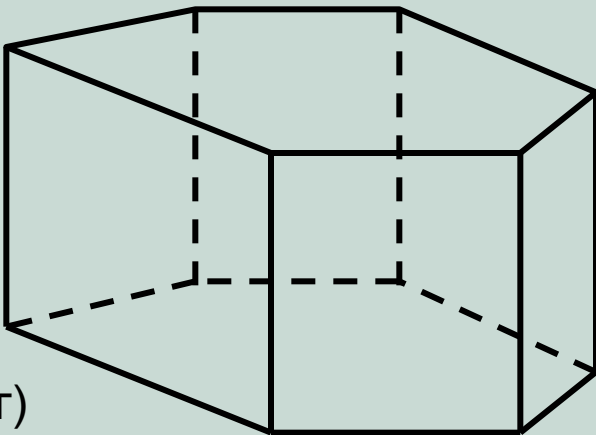
а)



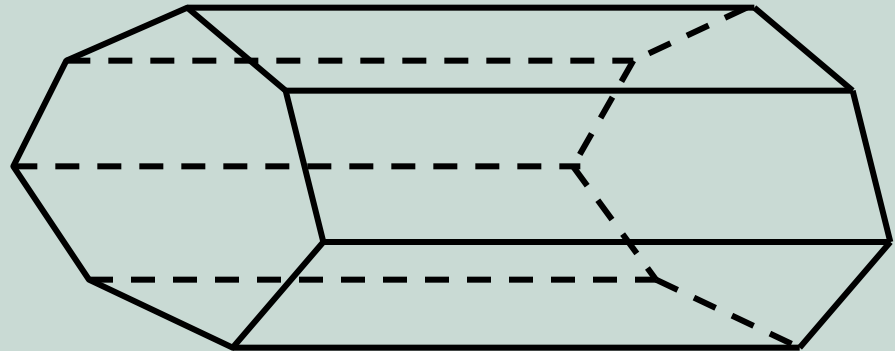
б)



в)



г)



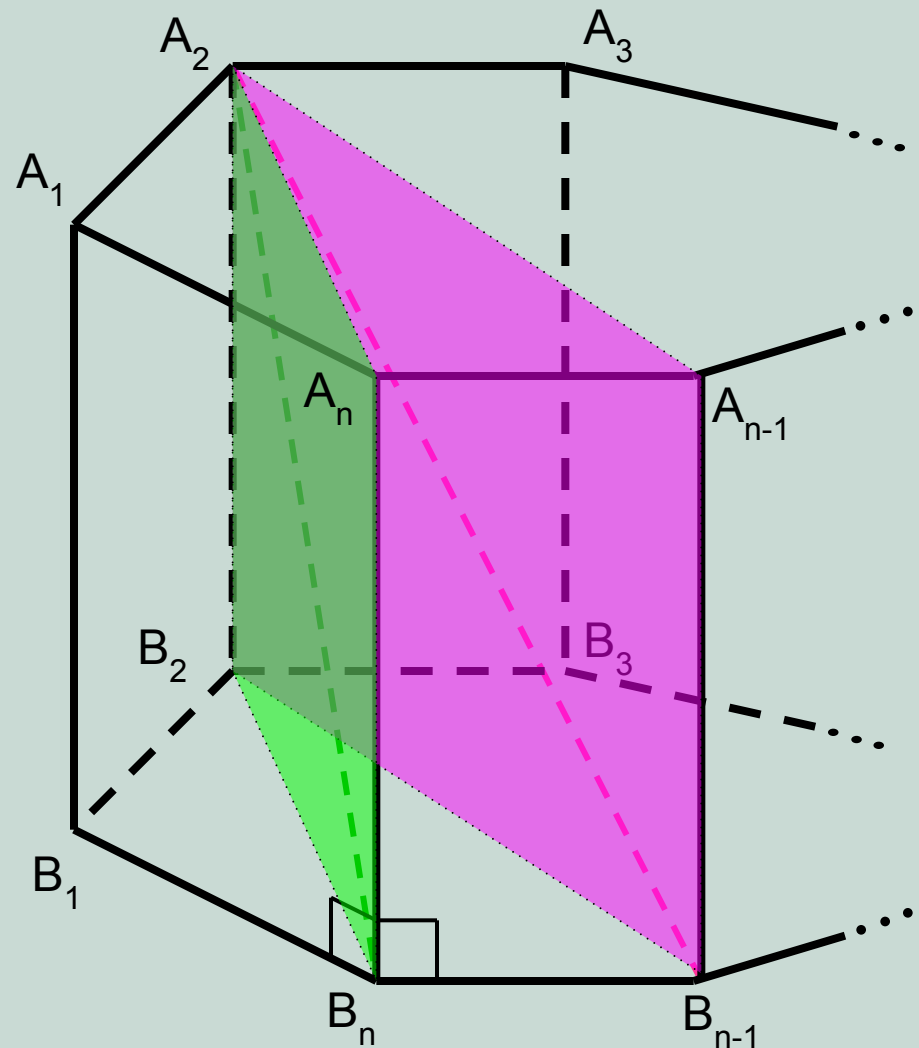
д)

Призма называется **прямой**, если боковое ребро перпендикулярно плоскости основания ($A_n B_n \perp (A_1 A_2 A_3)$). Очевидно, что в этом случае боковые грани призмы – прямоугольники.

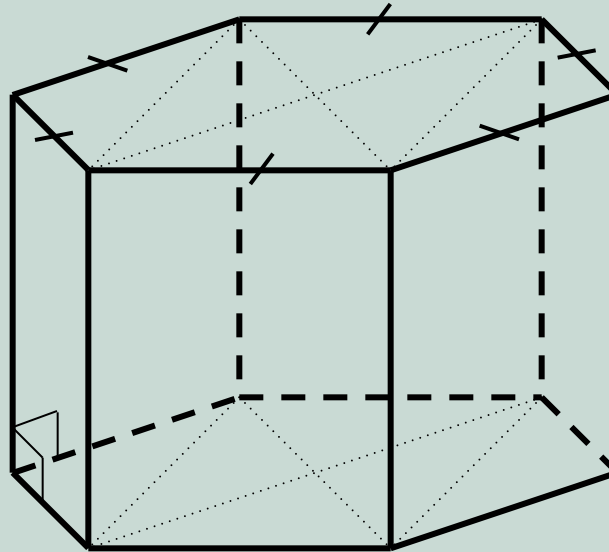
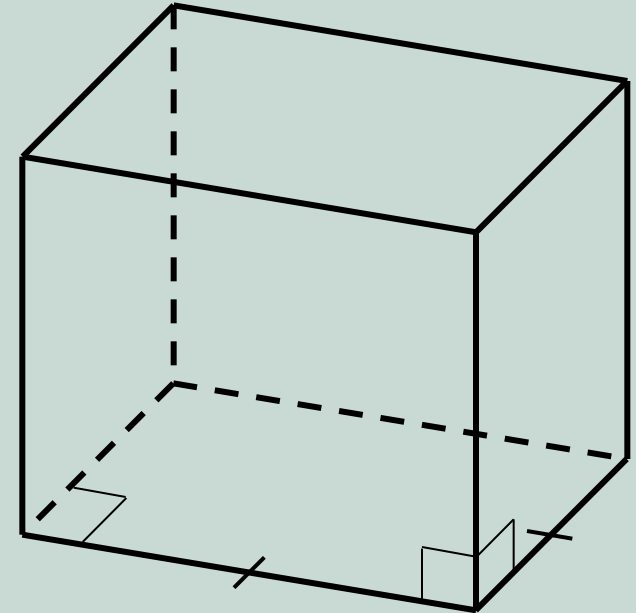
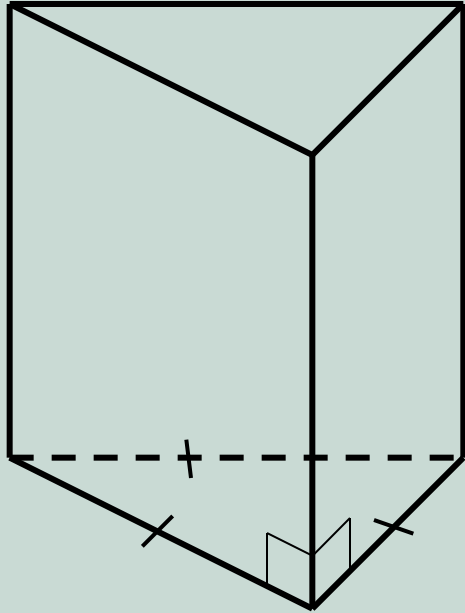
Отрезки, соединяющие точки верхнего и нижнего оснований, не лежащие в одной боковой грани, называются **диагоналями** призмы. *Задание:* сколько диагоналей в n-угольной призме?

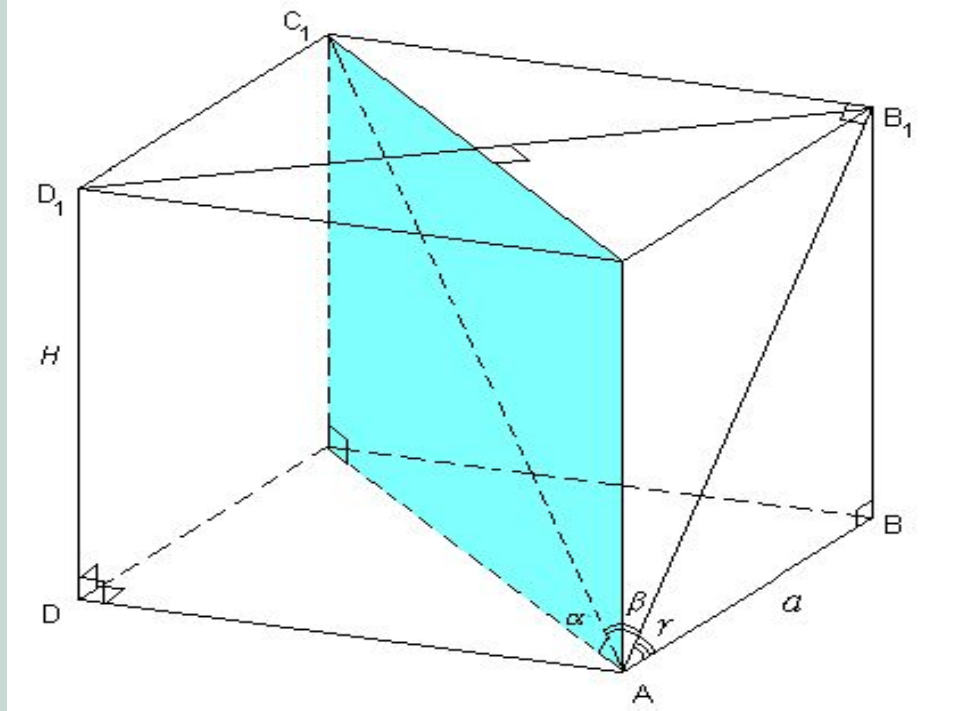
Ответ: $n(n-3)$.

Сечения призмы, образованные диагональю призмы и боковым ребром, называются **диагональными сечениями** призмы. В наклонной призме – это параллелограммы, в прямой призме – прямоугольники.



Призма называется *правильной*, если: 1) она прямая; и 2) её основания – правильные многоугольники. На рисунке представлены правильные а) треугольная; б) четырехугольная; в) шестиугольная призмы.





Правильная четырехугольная призма.

Основание – правильный четырёхугольник (квадрат)

Прямоугольник ACC_1A_1 – диагональное сечение (прямоугольник)

$AA_1 = H$ – высота призмы, $AB = a$ – сторона основания,

AC_1 – диагональ призмы, AB_1 – диагональ боковой грани, AC – диагональ основания

α – угол между диагональю призмы и основанием

β – угол между диагональю призмы и боковой гранью

γ – угол между диагональю боковой грани и основанием

$$AC_1 = \sqrt{2a^2 + H^2} = \frac{a\sqrt{2}}{\cos \alpha} = \frac{H}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin \beta}$$

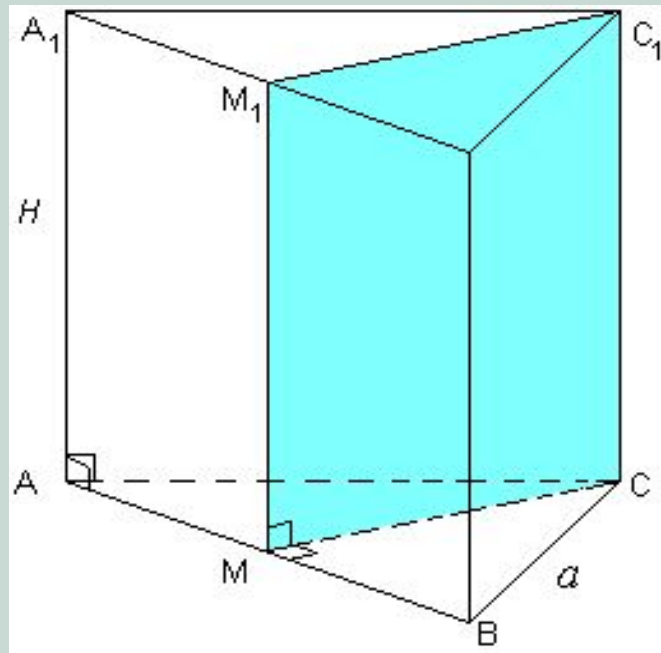
$$AC = a\sqrt{2} = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$AB_1 = \sqrt{a^2 + H^2} = \frac{a}{\cos \gamma}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2$$

$$S_{\text{бок}} = 4aH$$

$$S_{\text{полн}} = 4aH + 2a^2$$



Правильная треугольная призма.

Основание – правильный (равносторонний) треугольник

Прямоугольник MCC_1M_1 – медианное сечение

$AA_1 = H$ - высота призмы, $AB = a$ - сторона основания,

CM - высота основания $\angle A = 60^\circ$ $\angle ACM = \angle BCM = 30^\circ$

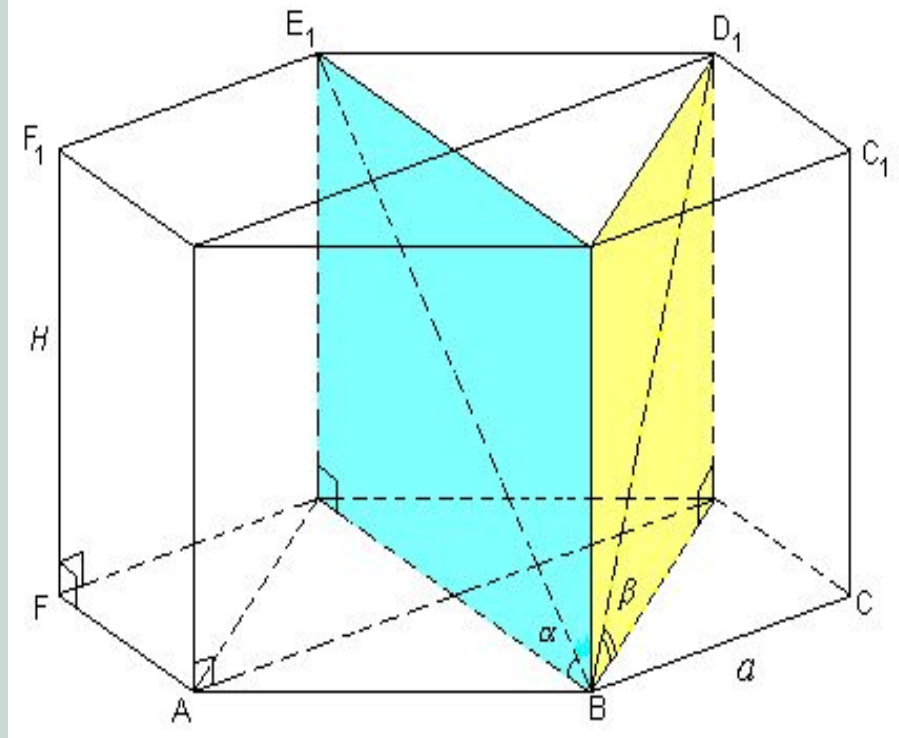
$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$CM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\text{бок}} = 3aH$$

$$S_{\text{полн}} = 3aH + \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$



Правильная шестиугольная призма.

Основание – правильный шестиугольник

Прямоугольники BEE_1B_1 и BDD_1B_1 – диагональные сечения

$AA_1 = H$ – высота призмы, $AB = a$ – сторона основания,

BE_1 – бо́льшая диагональ призмы, BD_1 – ме́ньшая диагональ боковой грани

BE – бо́льшая диагональ основания, BD – ме́ньшая диагональ основания

α – угол между бо́льшей диагональю призмы и основанием

β – угол между ме́ньшей диагональю призмы и основанием

$$BE = 2a$$

$$BD = a\sqrt{3}$$

$$BE_1 = \sqrt{4a^2 + H^2} = \frac{2a}{\cos \alpha} = \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$BD_1 = \sqrt{3a^2 + H^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\cos \beta} = \frac{H}{\sin \beta}$$

$$S_{осн} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

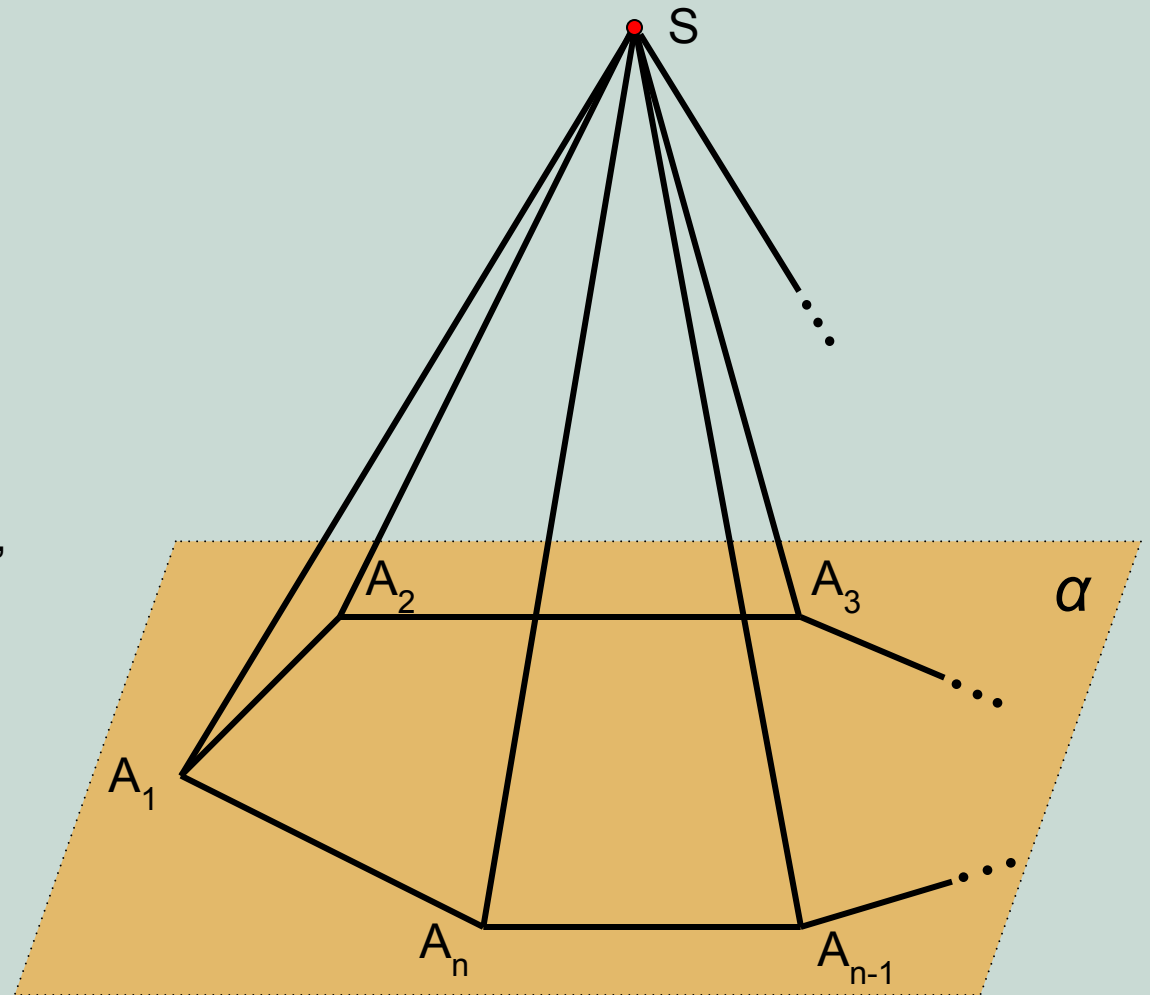
$$S_{бок} = 6aH$$

$$S_{полн} = 6aH + 3a^2\sqrt{3}$$

Построим в плоскости α произвольный n -угольник $A_1A_2\dots A_n$.
Выберем произвольную точку S , не принадлежащую плоскости α .
Соединим точку S со всеми вершинами n -угольника $A_1A_2\dots A_n$.

*Многогранник, образованный
многоугольником и n
треугольниками с общей
вершиной вне плоскости
многоугольника, является
 n -угольной пирамидой.*

Обозначается пирамида
перечислением всех точек,
участвующих в ее построении,
в нашем случае: $SA_1A_2\dots A_n$.
Точка S называется вершиной
пирамиды.



Многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ называется **основанием** пирамиды.

Треугольники $SA_1A_2, SA_2A_3, \dots, SA_{n-1}A_n$ – **боковые грани** пирамиды.

Отрезки $SA_1, SA_2, \dots, SA_n$ – **боковые ребра** пирамиды.

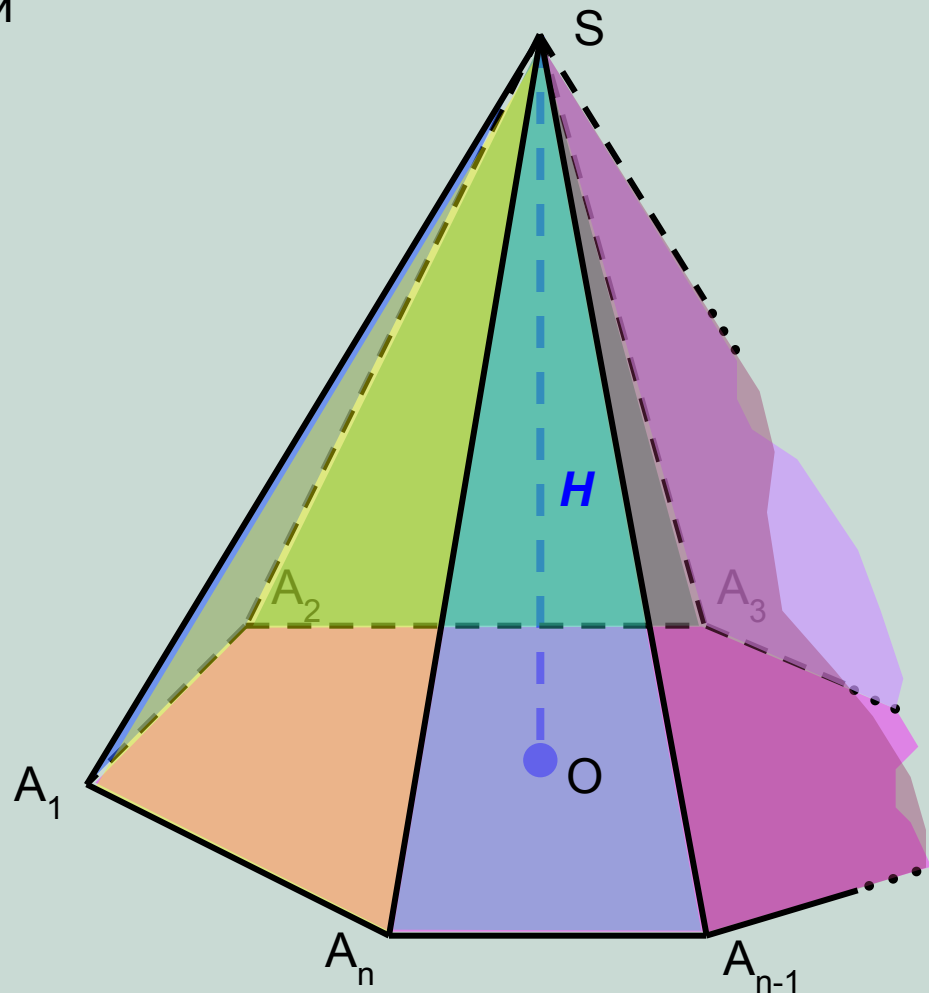
Можно установить, что для любой n -угольной пирамиды:

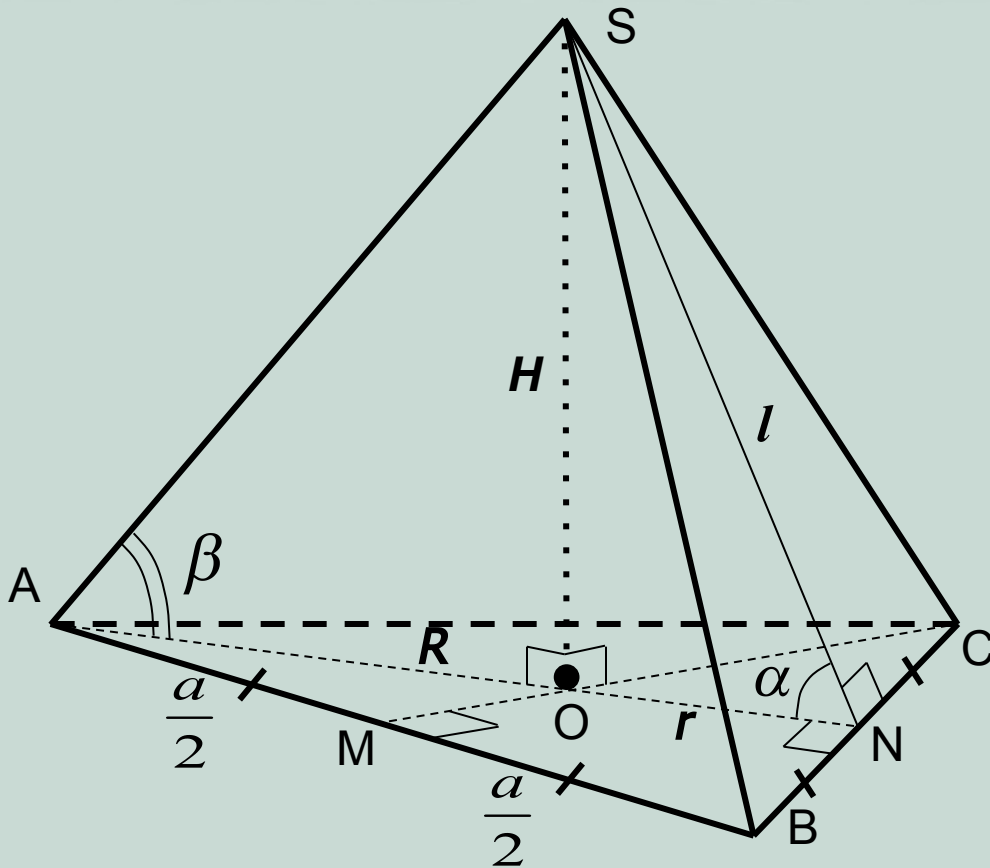
- 1) количество вершин – $(n+1)$; (В)
- 2) количество граней – $(n+1)$; (Г)
- 3) количество ребер – $2n$; (Р)

и поэтому, как для любого многогранника, для n -угольной пирамиды выполняется формула Эйлера:

$$B + \Gamma - P = 2.$$

Отрезок $SO \perp (A_1A_2A_3)$ – **высота** пирамиды.





Правильная треугольная пирамида SABC

Основание – правильный (равносторонний) треугольник $H = SO \perp (ABC)$ – высота пирамиды,

O – центр треугольника, $l = SN \perp BC$ – апофема (высота боковой грани)

$R = OA = OC$ – радиус описанной окружности, $r = OM = ON$ – радиус вписанной окружности ($AM = MB = \frac{a}{2}$)

α - угол между боковой гранью и плоскостью основания, β - угол между боковым ребром и плоскостью основания

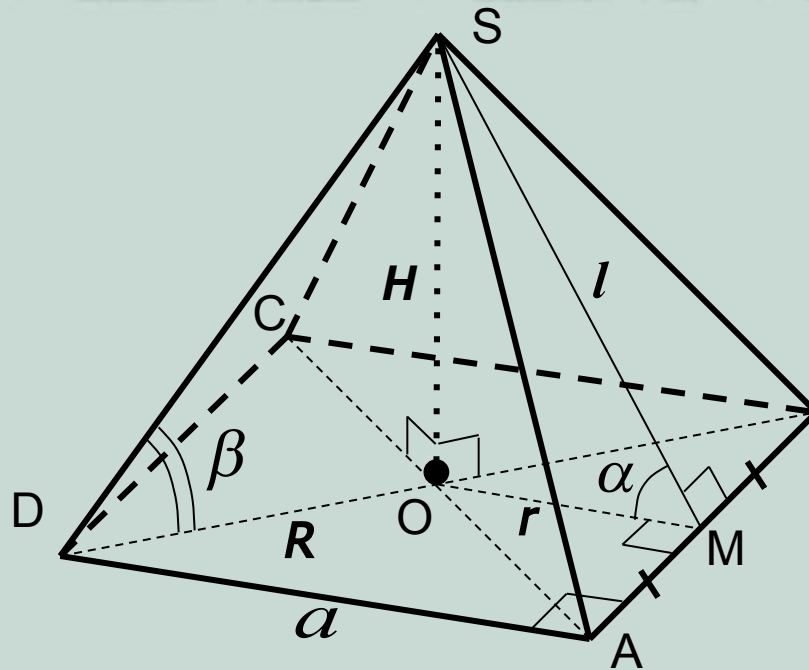
$$H^2 + r^2 = l^2 \quad AS = BS = CS = \sqrt{H^2 + R^2} \quad CM = AN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} \quad r = \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha} = l \cdot \cos \alpha$$

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$S_{\text{бок}} = 1,5al$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$



Правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$

Основание – правильный четырёхугольник (квадрат), $H = SO \perp (ABC)$ – высота пирамиды,

O – центр квадрата, $l = SM \perp AB$ – апофема (высота боковой грани)

$R = OA = OB = OC = OD$ – радиус описанной окружности, $r = OM$ – радиус вписанной окружности ($AM = MB$)

α - угол между боковой гранью и плоскостью основания

β - угол между боковым ребром и плоскостью основания

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$r = \frac{a}{2} = \sqrt{l^2 - H^2} = l \cdot \cos \alpha = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$AS = BS = CS = DS = \sqrt{H^2 + R^2}$$

$$S_{\text{осн}} = a^2$$

$$S_{\text{бок}} = 2al$$

$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

$$V = \frac{1}{3} a^2 H$$

