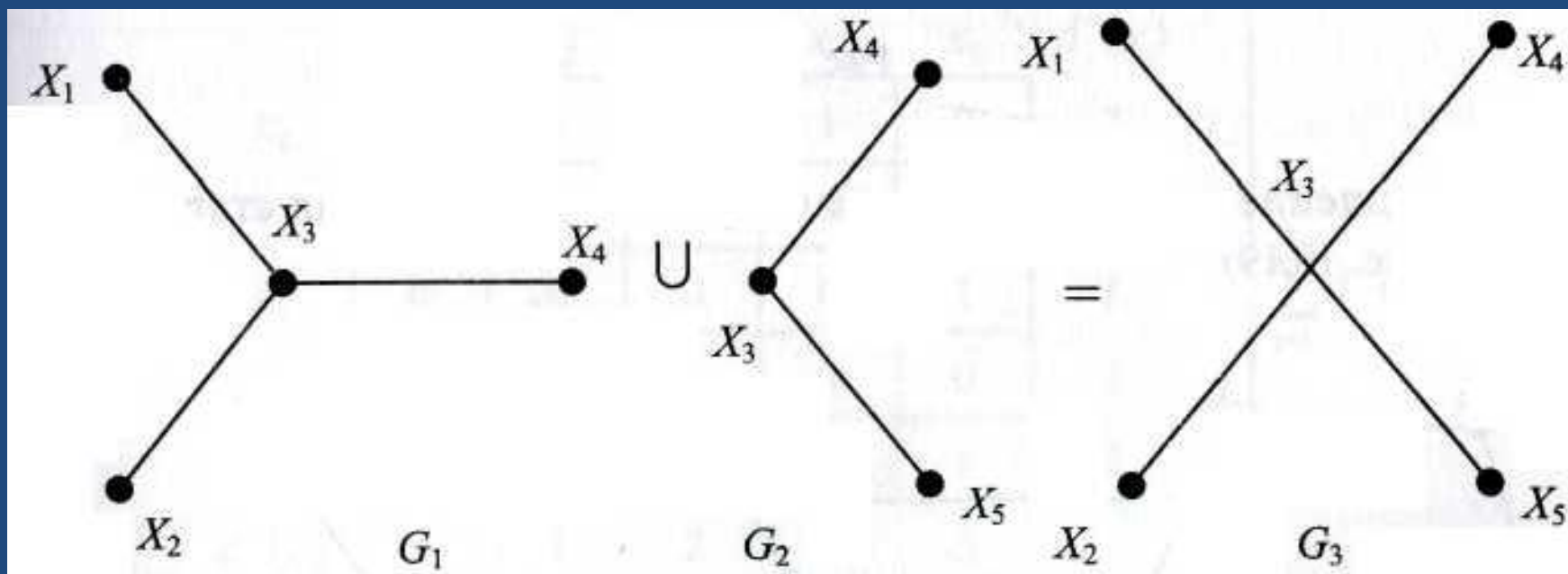


ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- **Удаление вершин или ребер** — это операция, с помощью которой можно из заданного графа $G = (X, U)$ получить граф с меньшим числом элементов (вершин и ребер).
- **Добавление ребра** — это операции по соединению несмежных вершин графа.
- **Объединение графов.** Граф G_3 является наложением графов G_1 и G_2 (рис. 10.16).

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ



• Рис. 10.16

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 4. Произведение двух графов G_1 и G_2 есть граф G , для которого $x_1 \cdot x_2 = G$ (рис. 10.17)

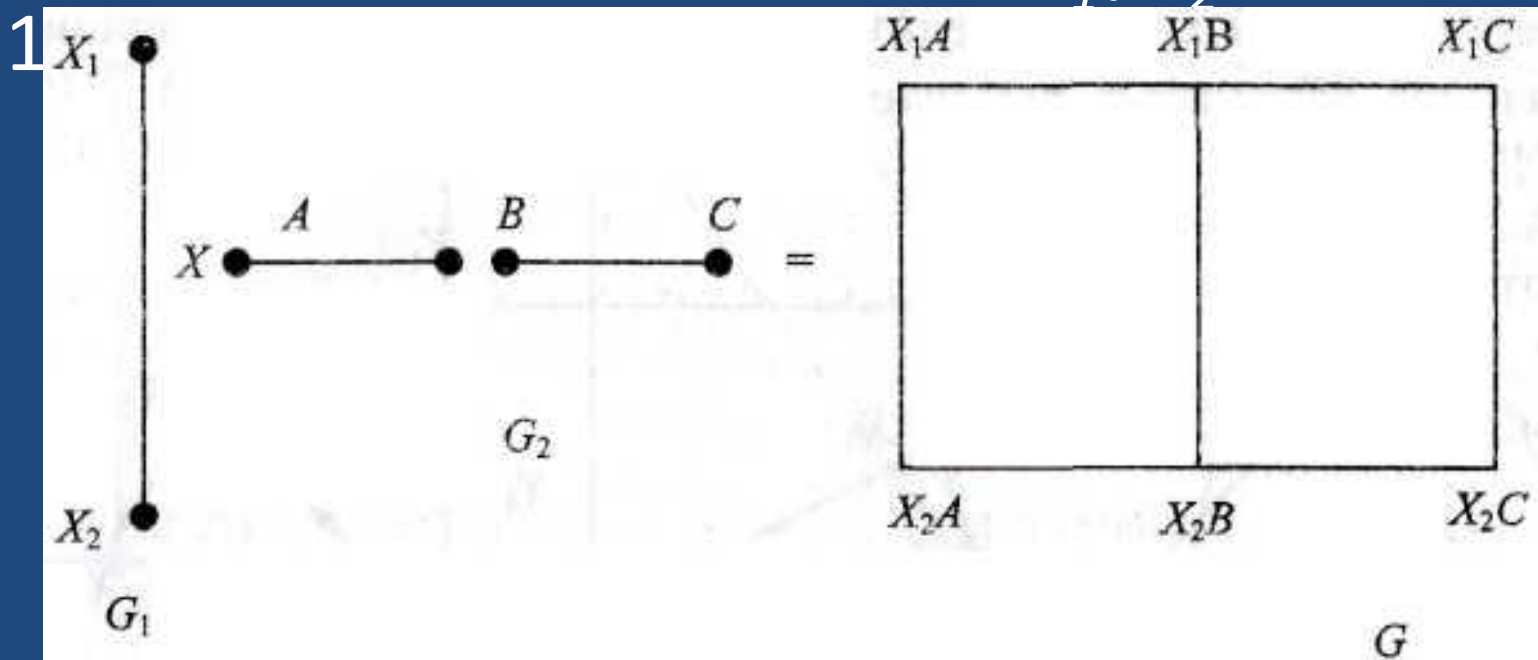


Рис. 10.17

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 5. **Стягивание ребра** означает отождествление смежных вершин (рис. 10.18).

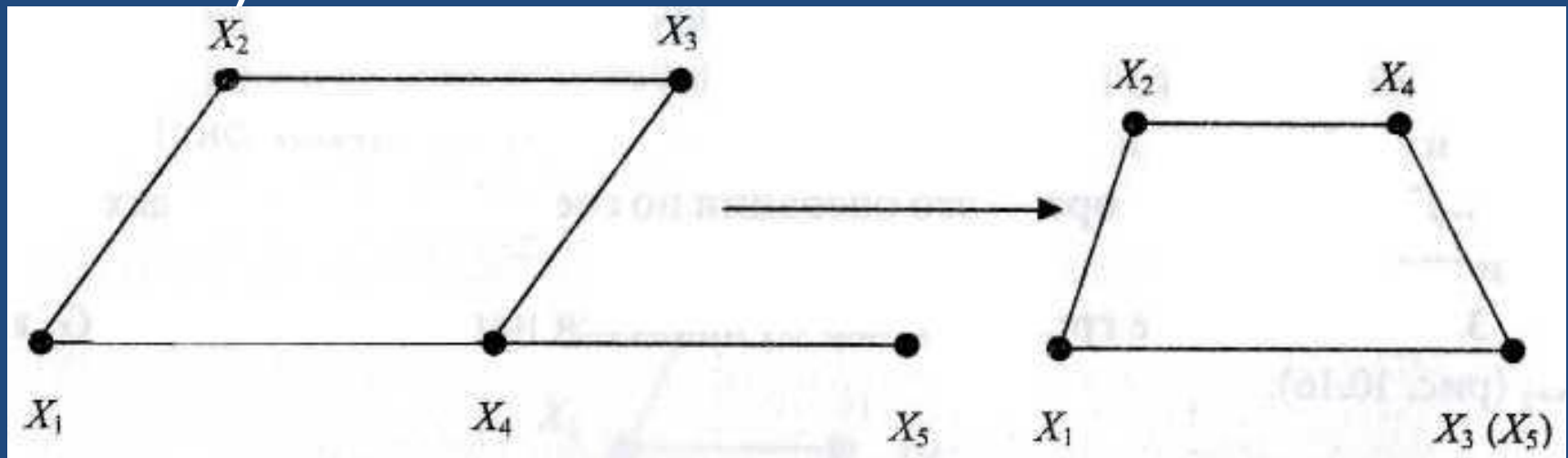


Рис. 10.18

ОПЕРАЦИИ НАД ГРАФАМИ

- 6. Расщепление вершин — это операция двойственная стягиванию

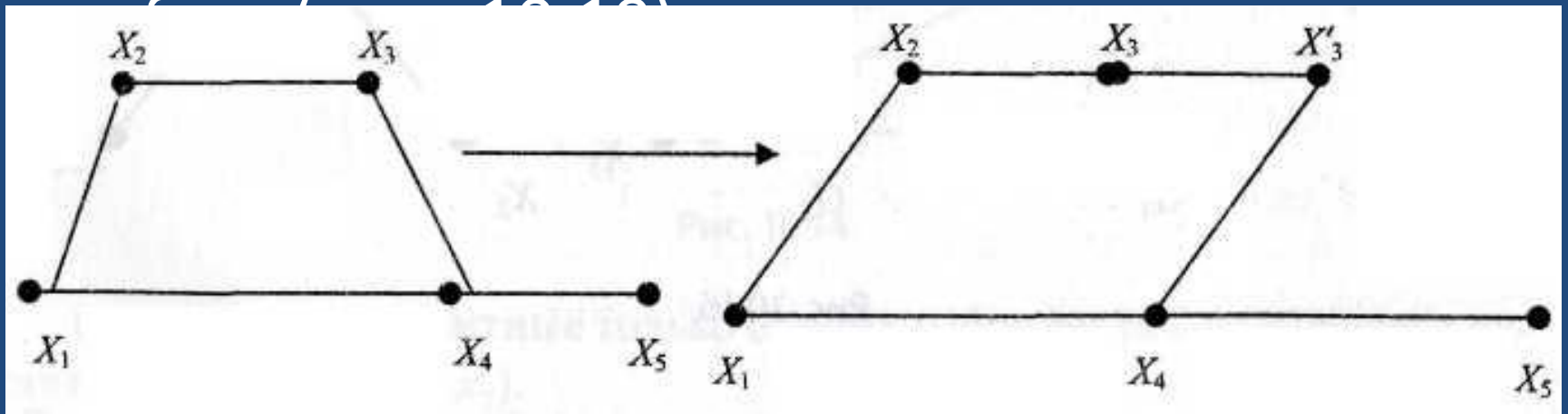


Рис. 10.19

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Графы можно задавать с помощью матриц. Построим некоторые из них.

Матрицей смежности вершин графа

называется квадратная матрица $A = \{a_{ik}\}$ размером $n \times n$, у которой строки и столбцы соответствуют вершинам, а элементы a_{ik} определяют из условий:

$$a_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершины } x_i \text{ и } x_k \text{ смежны, т.е. существует дуга } (x_i, x_k); \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- Для орграфа (рис. 10.20) построить матрицу смежности $A(G)$.

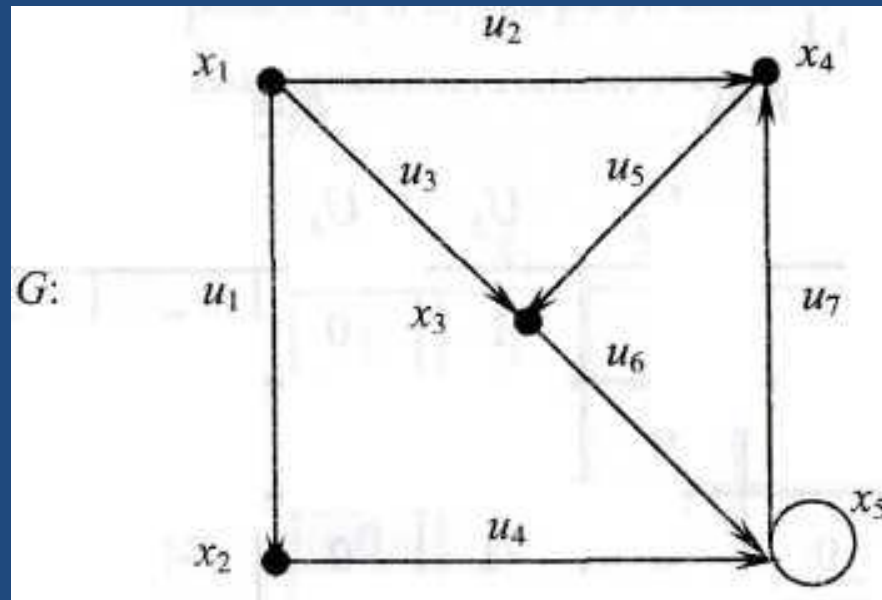


Рис. 10.20

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$$A(G) = \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & d^+(x_i) \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline d^-(x_i) & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & d^+(x_i) \\ \hline x_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ x_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline d^-(x_i) & 0 & 1 & 2 & 2 & 3 & \end{array}} \right\} \sum_{i=1}^5 d^+(x_i) = 8;$$

$$\underbrace{\hspace{15em}}_{\sum_{i=1}^5 d^-(x_i) = 8.}$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей инциденций $B(G) = \{b_{ik}\}$ орграфа $G = (X, U)$ называется прямоугольная матрица размерности $n \times m$ (n — число вершин графа, m — количество дуг), элементы которой удовлетворяют

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ является началом дуги } u = (x_i, x_k); \\ -1, & \text{если } x_i \text{ является концевой вершиной дуги } u = (x_i, x_k); \\ 0, & \text{если } x_i \text{ не является вершиной дуги } u_k, \text{ т.е. вершина } x_i \\ & \text{и дуга } u_k \text{ неинцидентны;} \\ 2, & \text{если дуга } u_k = (x_i, x_i) \text{ является петлей.} \end{cases}$$

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

- В матрице инциденций для неографа при ее построении элементы -1 следует заменить на 1.
- Построим матрицу $B(G)$ инциденций для орграфа G (рис. 10.20).

		U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8
$B(G) :$	x_1	1	1	1	0	0	0	0	0
	x_2	-1	0	0	1	0	0	0	0
	x_3	0	0	-1	0	-1	1	0	0
	x_4	0	-1	0	0	1	0	-1	0
	x_5	0	0	0	-1	0	-1	1	2

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей пропускных способностей дуг $C(G) = \{c_{ik}\}$ графа G называется квадратная матрица размерности $n \times n$, элементы которой определяют из условий:

$$c_{ik} = \begin{cases} c_{ik} & \text{— величина, равная значению пропускной способности дуги;} \\ 0 & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Матрицу пропускных способностей дуг $C = (G)$ можно построить на основании матрицы смежности $A = (G)$, в которой 1 заменяются значением c_{ik} пропускной способности соответствующей дуги графа.

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

Матрицей достижимостей $D(G) = \{d_{jk}\}$ графа G называется квадратная матрица размерности $n \times n$ (n — число вершин орграфа), элементы которой удовлетво

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$C(G) :$	x_1	0	C_{12}	C_{13}	C_{14}	0
	x_2	0	0	0	0	C_{25}
	x_3	0	0	0	0	C_{35}
	x_4	0	0	1	C_{43}	0
	x_5	0	0	0	C_{45}	C_{55}

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАФОВ

$$d_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_k \text{ достижима из вершины } x_i, \\ & \text{т.е. для вершин } x_k \text{ и } x_i \text{ орграфа можно указать путь;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$D(G) :$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	1	1	1	1	0
x_2	0	1	1	1	1
x_3	0	0	1	1	1
x_4	0	0	1	1	1
x_5	0	0	1	1	1

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Граф $G(X, U)$, в котором все вершины соединены простой цепью называется **СВЯЗНЫМ**.

Отношение связности вершин графа называется **ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ**. Классы эквивалентности по отношению к СВЯЗНОСТИ называются **компонентами СВЯЗНОСТИ** графа, или компонентой связности графа называется его связный подграф.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

На рис. 10.22, а граф имеет две компоненты связности, на рис. 10.20, б у графа 3 компоненты связности.

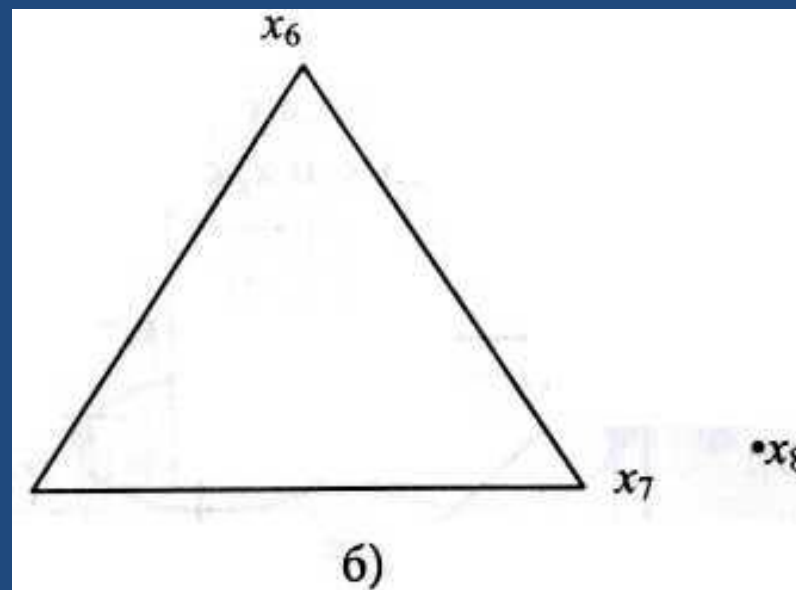
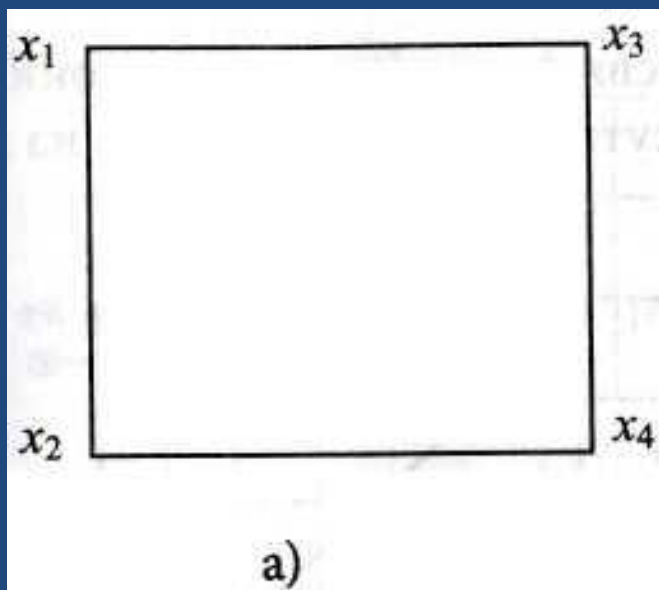


Рис. 10.22

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Число компонент связности графа G обозначается $k(G)$.

Граф G является **связным**, когда $k(G) = 1$.

Если $k(G) > 1$, то граф называется **несвязным**. Например, для графа на рис. 10.24 $k(G) = 1$, для графа (рис. 10.25) $k(G) = 2$ и для графа G , представленного на рис. 10.26, $k(G) = 3$.

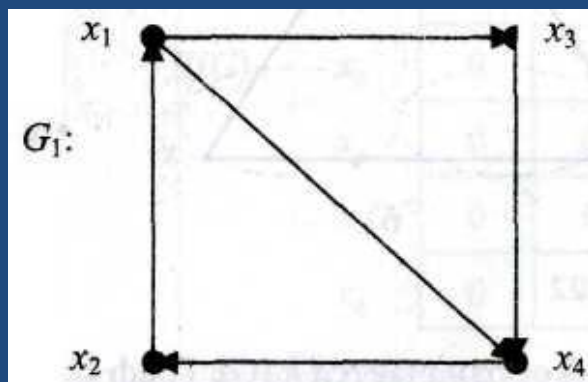


Рис. 10.24

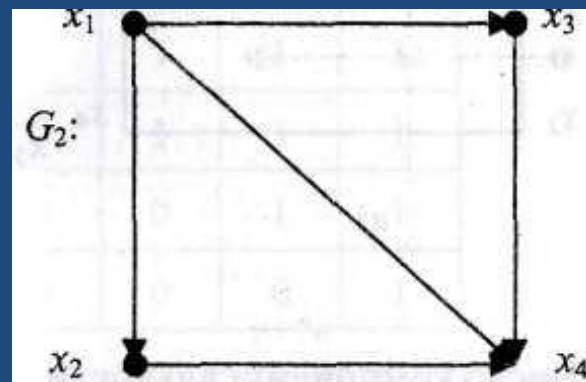


Рис. 10.25

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

Вершина графа G называется **точкой сочленения**, если ее удаление увеличивает число компонент связности.

Мостом называется ребро графа, удаление которого увеличивает число компонент связности.

Блоком называется связный граф, не имеющий точек сочленения.

На рис. 10.23, в графе G : вершины x_3 и x_4 являются точками сочленения, ребро $U_4(x_3, x_4)$ называется мостом и связные подграфы $\{x_1, x_2, x_3\}$, $\{x_4, x_5, x_6\}$, $\{x_5, x_6, x_7\}$, $\{x_4, x_5, x_6, x_7\}$ являются блоками.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

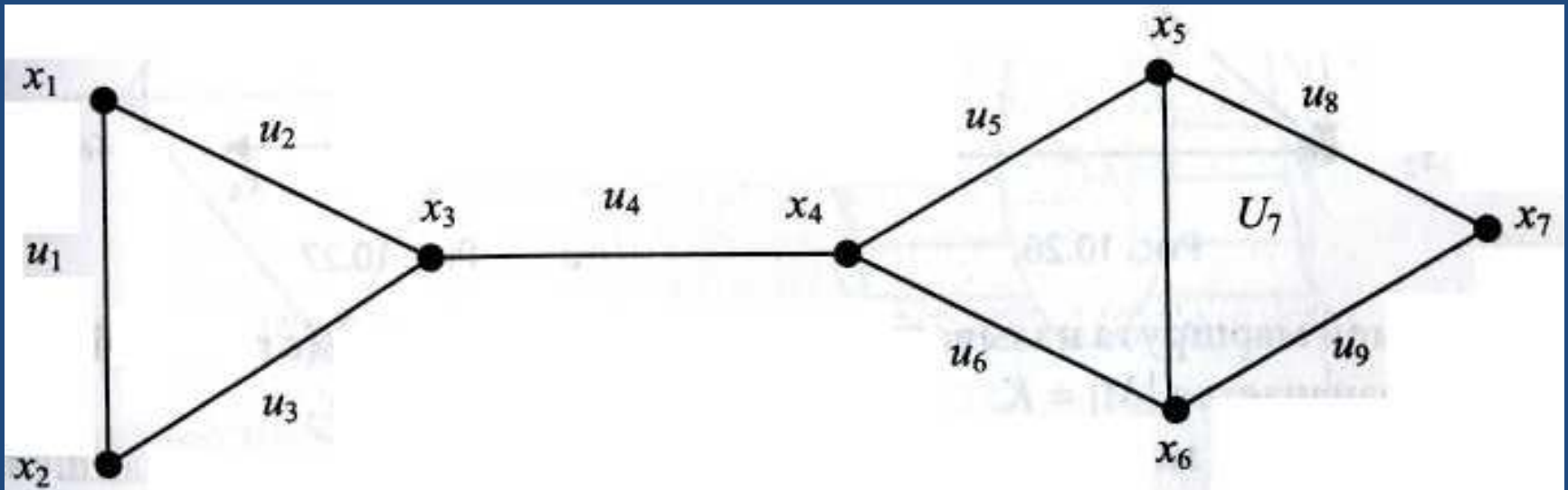


РИС. 10.23

Теорема. Граф $G = (X, U)$ связан тогда и только тогда, когда его нельзя представить в виде объединения двух графов.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф G_1 называется **сильно связным** графом или **сильным**, если для любых различных двух вершин x_i и x_k существует по крайней мере один путь, соединяющий эти вершины, т.е. любые две вершины взаимно достижимые (рис. 10.24).

Орграф G_2 называется **односторонне связным** или **односторонним**, если для двух вершин x_i и x_k существует путь либо из x_i в x_k , либо из x_k в x_i (рис. 10.25).

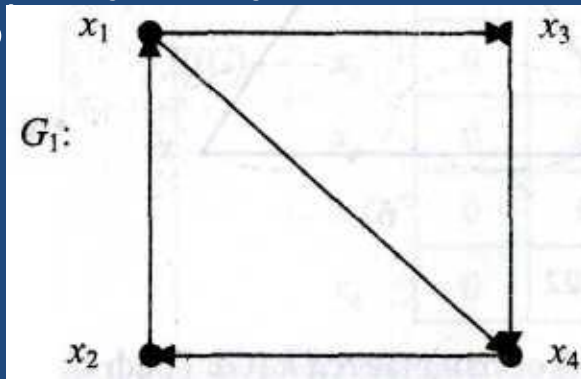


Рис. 10.24

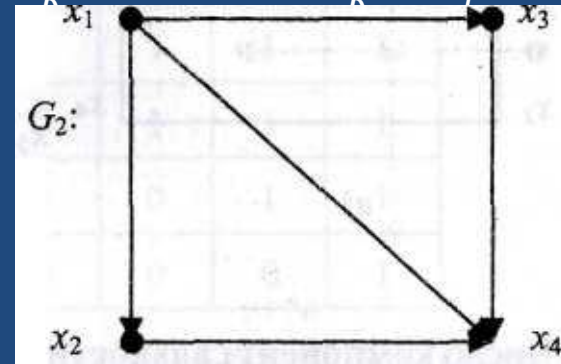


Рис. 10.25

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Орграф G_3 называется **слабосвязным** или **слабым**, если для двух любых вершин графа существует по крайней мере один маршрут (рис. 10.26).
- Орграф G_4 называется **несвязным**, если для некоторой пары вершин его не существует маршрута, соединяющего

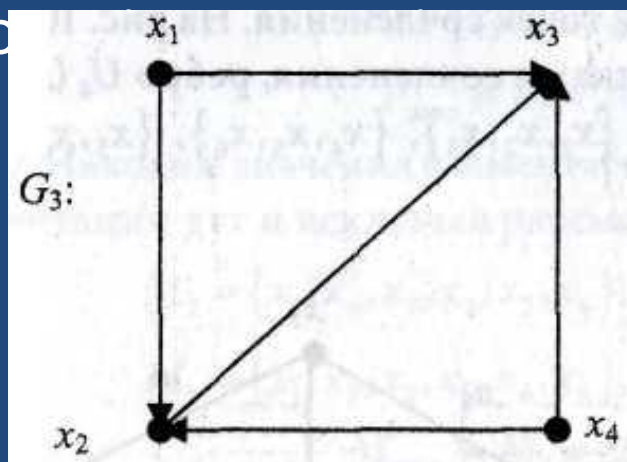


Рис. 10.26

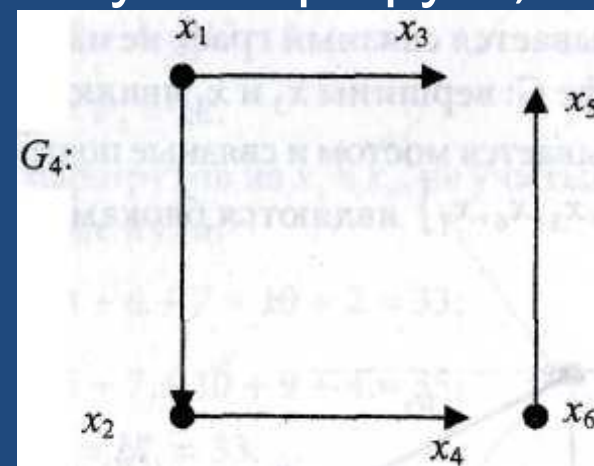
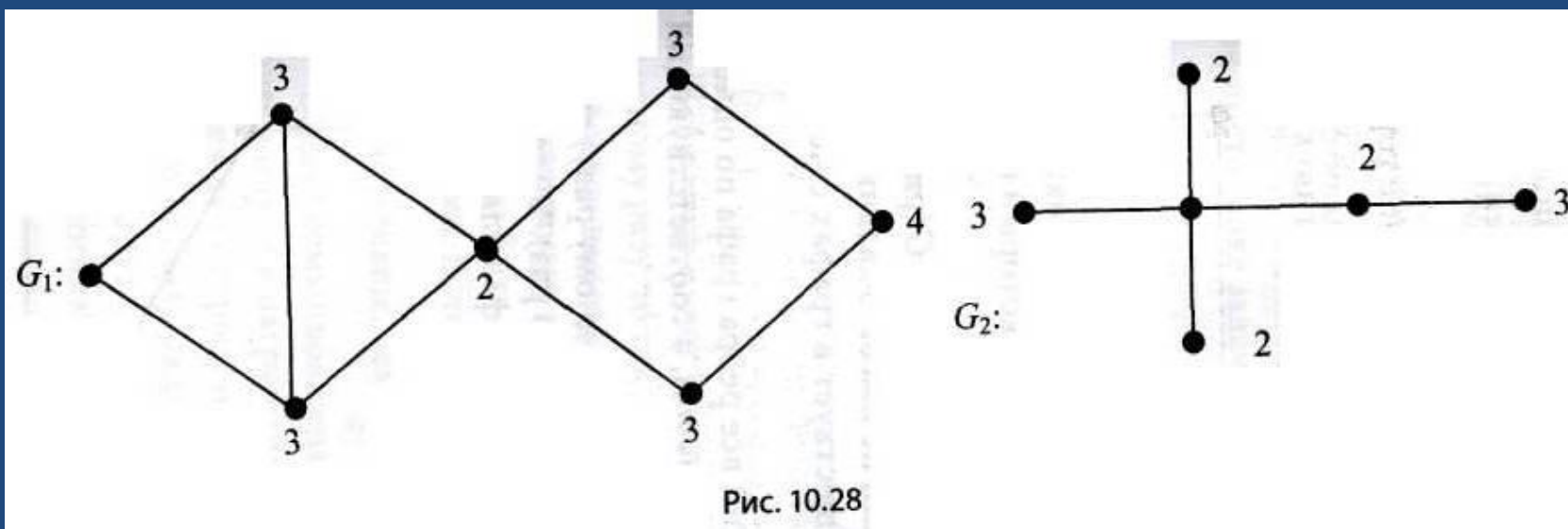


Рис. 10.27

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

- Длиной маршрута называется количество ребер в нем (с повторениями). Обозначается $|M| = K$.
- Расстоянием между вершинами x_i и x_k называется длина кратчайшей цепи, а сама кратчайшая цепь называется **геодезической**. Обозначается расстояние $l(x_i, x_k)$.
- **Диаметром графа** G (обозначается $D(G)$) называется длина наибольшей геодезической.
- **Эксцентриситетом** $e(x_i)$ вершины x_i в связном графе $G(X, U)$ называется максимальное расстояние от вершины до других вершин графа G .
- **Радиусом** $R(G)$ графа G называется наименьший из эксцентриситетов вершин.
- Вершина x_i называется **центральной**, если ее эксцентриситет совпадает с радиусом графа, т.е. $e(x_i) = R(G)$.

СВЯЗНОСТЬ ГРАФОВ И КОМПОНЕНТЫ СВЯЗНОСТИ

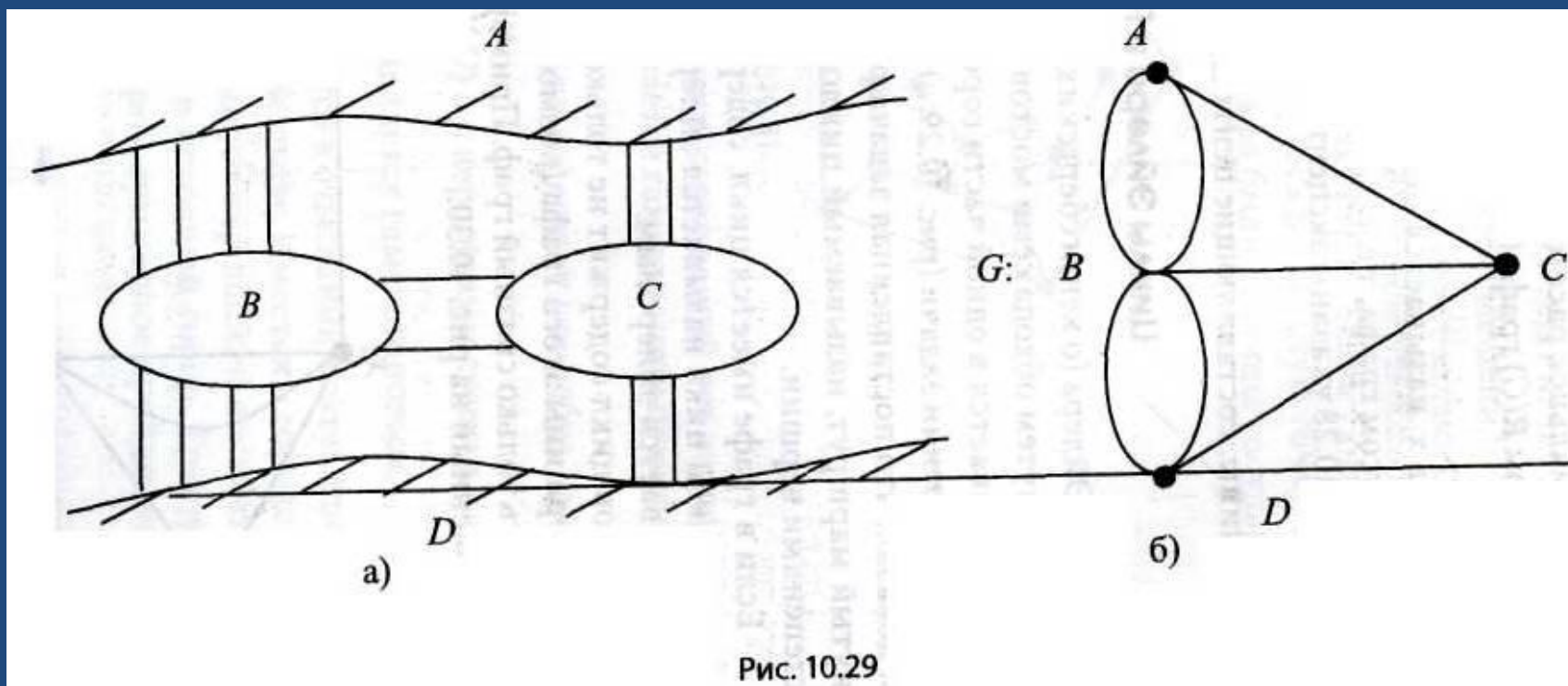


- На рис. 10.28 указаны эксцентриситеты вершин и центры двух графов G_1 и G_2 .
- Вершины, составляющие центры, выделены.

Циклы Эйлера и Гамильтона

- Задача Эйлера (о кенигсбергских мостах) заключается в нахождении маршрута путем обхода семи мостов по одному разу, который начинается и оканчивается в одной части города, рис. 10.29.
- При решении задачи (рис. 10.29, а) Эйлер составил граф G (рис. 10.29, б) и доказал, что поставленная задача решений не имеет. Указанный замкнутый маршрут, называемый циклом, существует в графах с четными степенями вершин.

Циклы Эйлера и Гамильтона



Если в графе имеется цикл, содержащий все ребра графа по одному разу, то такой цикл называется эйлеровым циклом, а соответствующий граф называется эйлеровым.

Циклы Эйлера и Гамильтона

Эйлеров цикл содержит не только все ребра (по одному разу) графа, но и все вершины этого графа (возможно по несколько раз).

Эйлеровым может быть только связный граф. Примером такого графа является граф, представленный на рис. 10.30.

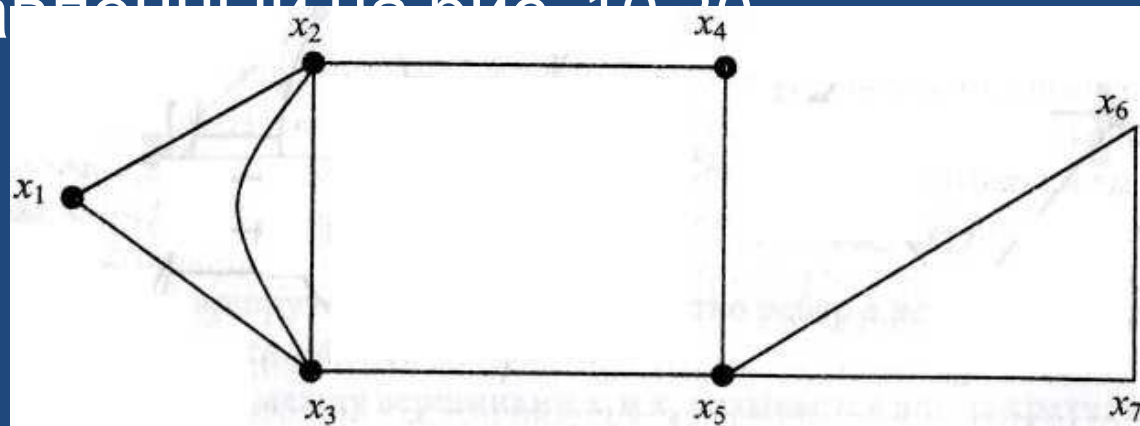


Рис. 10.30

Циклы Эйлера и Гамильтона

- Теорема Эйлера. Если граф $G = (X, U)$ связан и нетривиален, то следующие утверждения эквивалентны:
 - $G = (X, U)$ — эйлеров граф.
 - Каждая вершина имеет четную степень.
 - Множество ребер можно разбить на простые цепи.

Циклы Эйлера и Гамильтона

Название **гамильтоновых циклов**

произошло от задачи о кругосветном путешествии, сформированной У.

Гамильтоном: Необходимо обойти все вершины графа, диаграмма которого представляла укладку додекаэдра (рис. 10.31), по одному разу и вернуться в исходную точку. В начальной постановке задачи вершинами графа были столицы государств.

Циклы Эйлера и Гамильтона

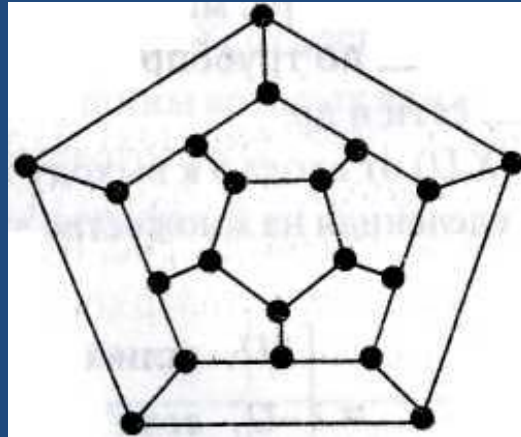


Рис. 10.31

- Если граф имеет простейший цикл, содержащий все вершины графа по одному разу, то такой цикл называется **гамильтоновым циклом**, а граф называется **гамильтоновым**.
- Гамильтонов цикл не обязательно содержит все ребра графа, но сам граф может быть только связным.

Циклы Эйлера и Гамильтона

Теорема. Если в графе $G = (X, U)$ с n вершинами степень каждой вершины не меньше $\frac{n}{2}$, то граф является гамильтоновым.

Задача коммивояжера заключается в отыскании кратчайшего гамильтонова цикла в нагруженном полном графе.

Имеется n городов, расстояние между которыми известны, коммивояжер должен посетить все n городов по одному разу, вернувшись в исходный город. Требуется найти такой маршрут движения, при котором суммарное пройденное расстояние будет минимальным.

Циклы Эйлера и Гамильтона

- Составляя задачи отыскания эйлеровых и гамельтоновых циклов, следует отметить, что внешне формулировки задач похожи, однако они оказываются принципиально различными с точки зрения практического применения.
- Эйлером получено просто проверяемое необходимое и достаточное условие существования в графиках эйлерова цикла.
- Для гамельтоновых графов таких условий нет, поэтому алгоритма построения таких циклов нет.