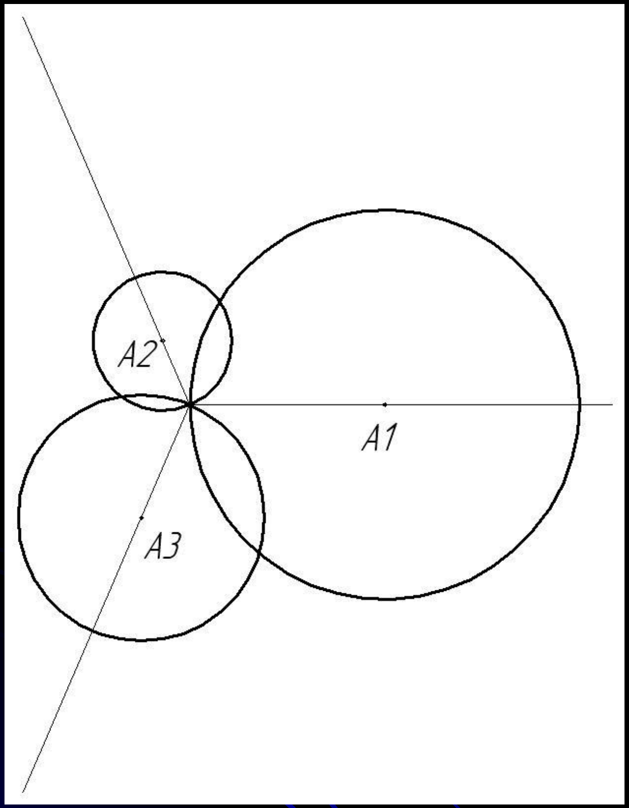
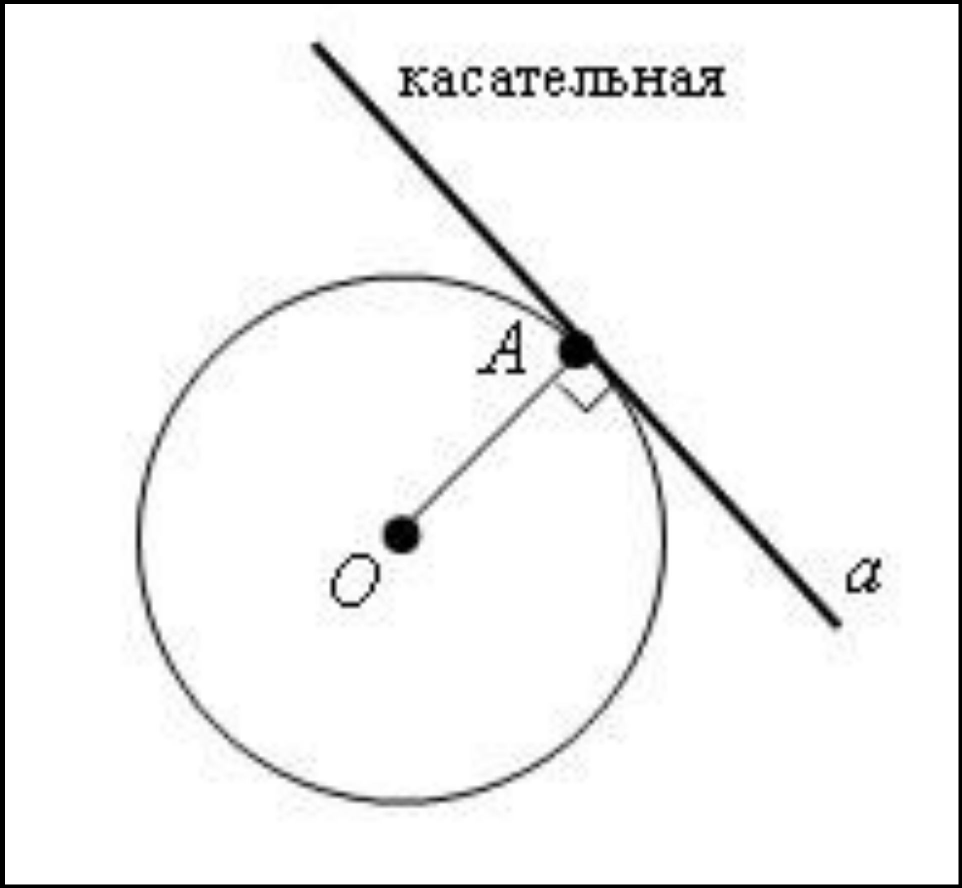
Окружности.



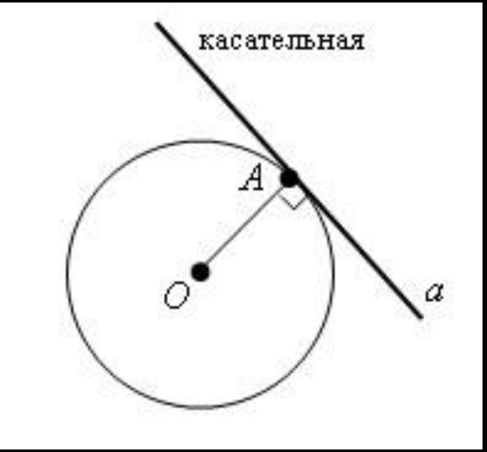
Работу выполнили ученицы 8 класса «Б»
Тузлукова Анастасия
Шарапова Юлия

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку, называется касательной к окружности, а их общая точка называется точкой касания прямой к окружности



Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

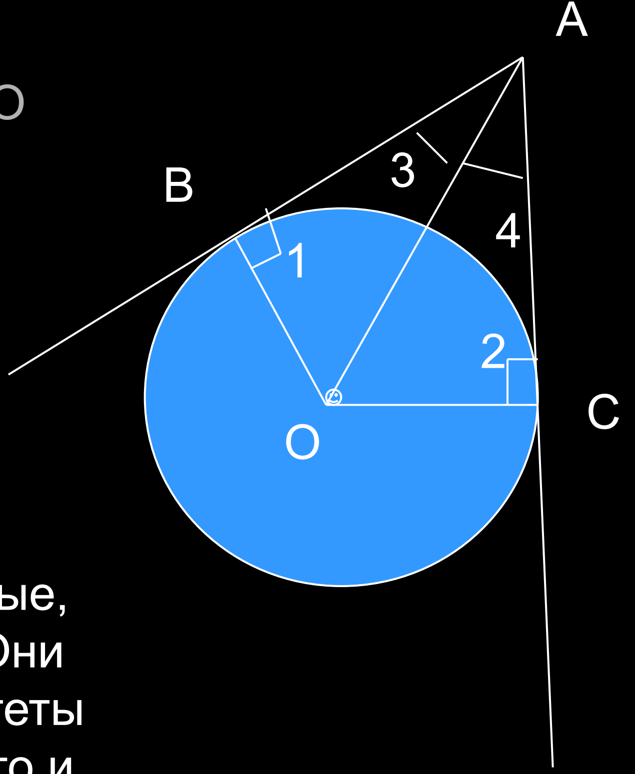


Пусть а – касательная к окружности с центром О, А – точка касания. Докажем, что касательная а перпендикулярна к радиусу ОА.

Если это не так, то радиус ОА является наклонной к прямой а. Т.к. перпендикуляр, проведенный из точки О к прямой а, меньше наклонной ОА, то S от центра О окружности до прямой а меньше радиуса. Следовательно, прямая а и окружность имеют две общие точки. Но это противоречит условию: прямая а – касательная. Значит, прямая а перпендикулярна к радиусу ОА. Теорема доказана.

Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО



По теореме о свойстве касательной углы 1 и 2 прямые, поэтому треугольники ABO и ACO прямоугольные. Они равны, т.к. имеют общую гипотенузу OA и равные катеты OB и OC. Следовательно, AB=AC и угол 3= углу 4, что и требовалось доказать.

Если прямая проходит через конец радиуса, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу, то она является касательной.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

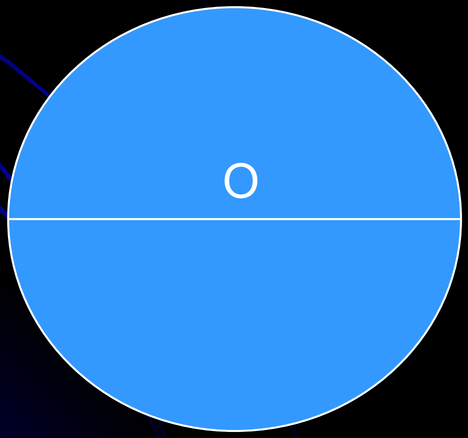
Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра окружности к данной прямой. Поэтому S от центра окружности до прямой равно радиусу, и, следовательно, прямая и окружность имеют только одну общую точку. Но это и означает, что данная прямая является касательной к окружности. Теорема доказана.

Центральный угол – угол с вершиной в центре окружности.

Дуга называется полуокружностью, если отрезок, соединяющий ее концы, является диаметром окружности.

Если центральный угол неразвернутый, то дуга, расположенная внутри этого угла, меньше полуокружности.

Дуга, не расположенная внутри этого угла, больше полуокружности.



Если дуга меньше полуокружности или является полуокружностью, то ее градусная мера считается равной градусной мере центрального угла.

Если дуга больше полуокружности, то ее градусная мера считается равной 360 градусов – центральный угол.

Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают окружность, называется вписанным углом.

Теорема: вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

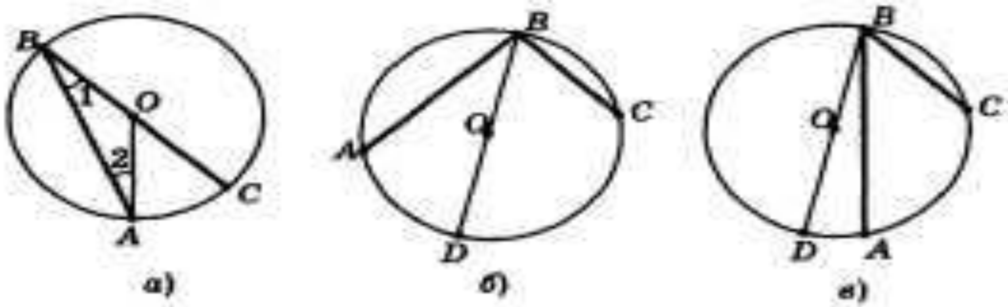


Рис. 10

Доказать: $\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC$.

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая расположения луча BO относительно угла ABC.

1) *Луч BO совпадает с одной из сторон угла ABC*, например со стороной BC (рис. 10, *а*). В этом случае дуга AC меньше полуокружности, поэтому $\angle AOC = \smile AC$. Так как угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника ABO, а углы 1 и 2 при основании равнобедренного треугольника равны, то $\angle AOC = \angle 1 + \angle 2 = 2\angle 1$. Отсюда следует, что $2\angle 1 = \smile AC$ или $\angle ABC = \angle 1 = \frac{1}{2} \smile AC$.

2) *Луч BO делит угол ABC на два угла.* В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 10, *б*). Точка D разделяет дугу AC на две дуги: $\smile AD$ и $\smile DC$. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle DBC = \frac{1}{2} \smile CD$. Складывая эти равенства почленно, получаем:

$$\angle ABD + \angle DBC = \frac{1}{2} \smile AD + \frac{1}{2} \smile CD,$$

или

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

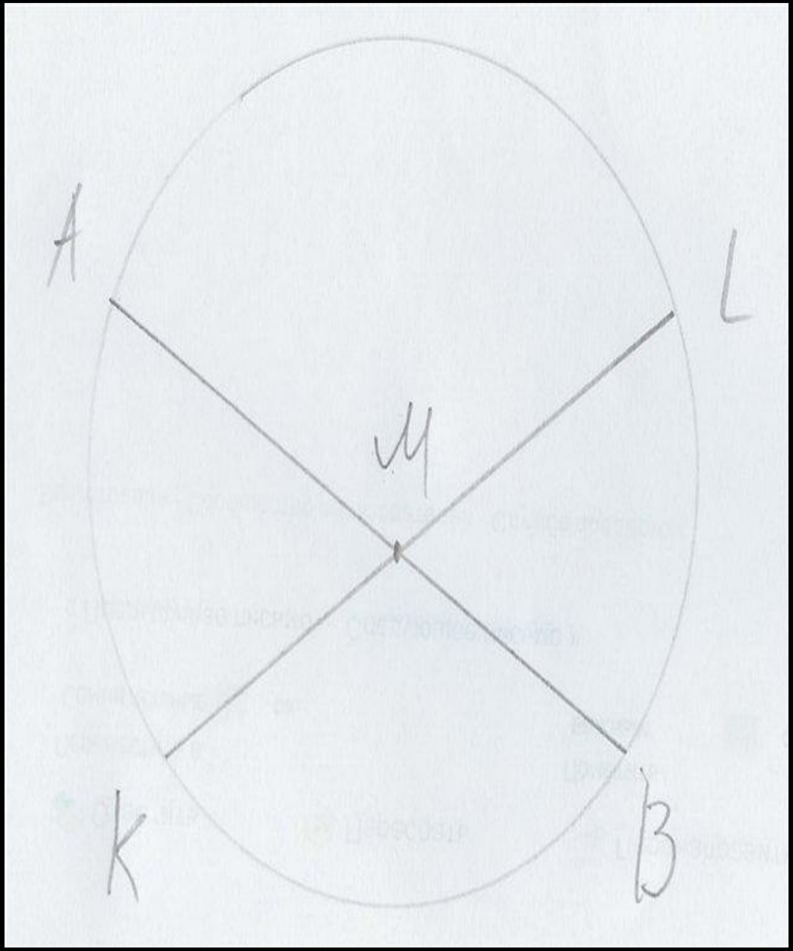
3) *Луч BO не делит угол ABC на два угла и не совпадает со сторонами этого угла.* В этом случае луч BO пересекает дугу AC в некоторой точке D (рис. 10, *в*). Точка C разделяет дугу AD на две дуги: $\smile AC$ и $\smile DC$. По доказанному $\angle ABD = \frac{1}{2} \smile AD$ и $\angle CBD = \frac{1}{2} \smile CD$. Вычитая из первого равенства второе, получаем:

$$\angle ABD - \angle CBD = \frac{1}{2} \smile AD - \frac{1}{2} \smile CD,$$

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AC.$$

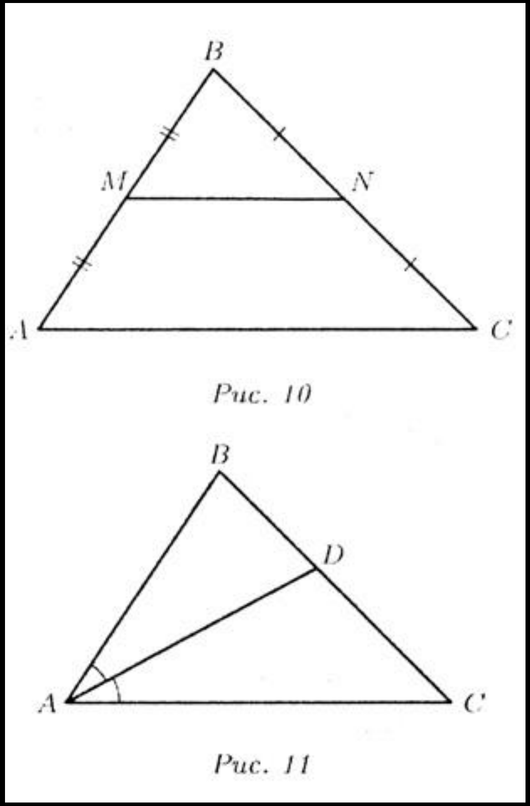
Теорема об отрезках пересекающихся хорд

- Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.



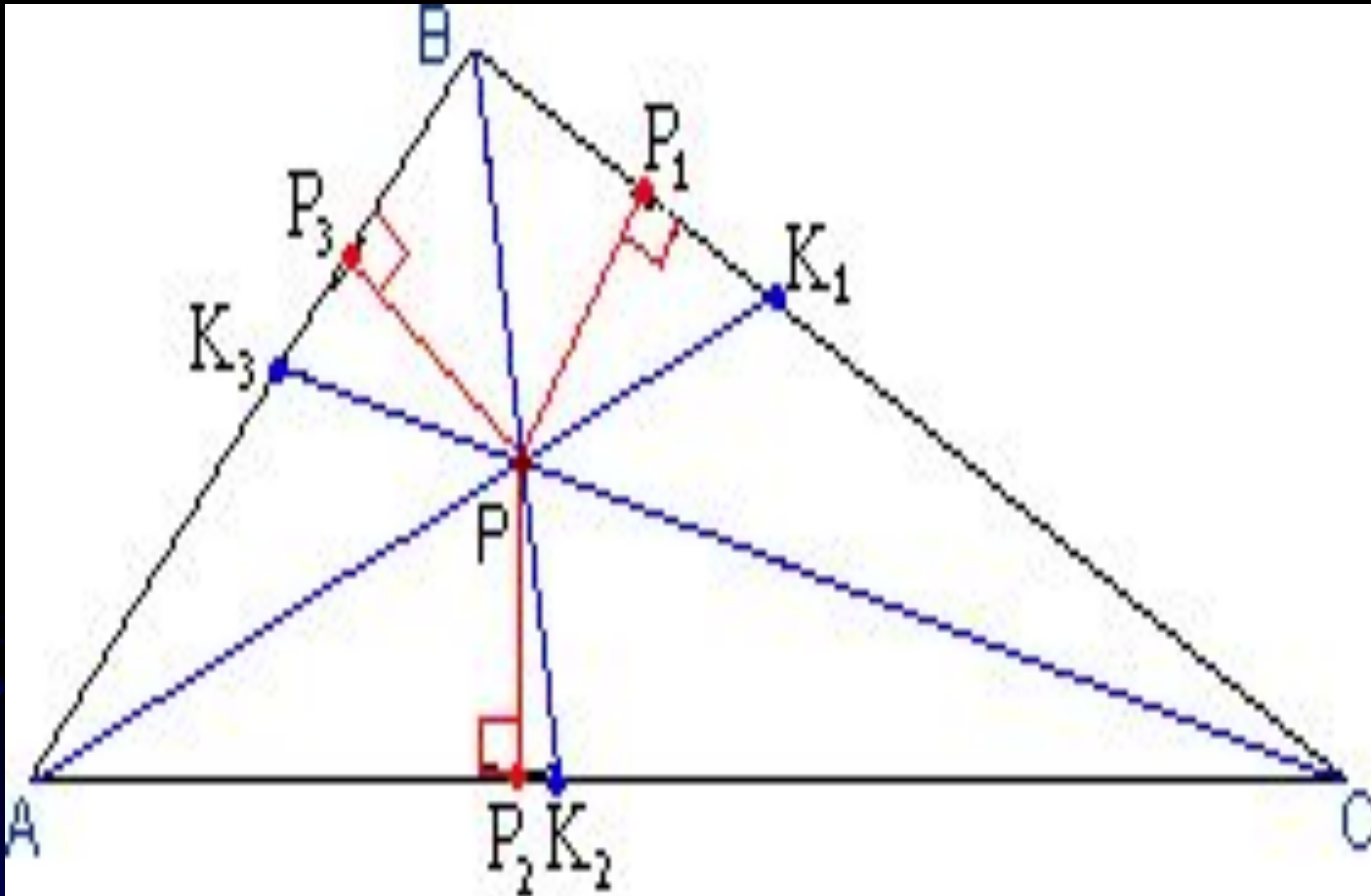
Теорема о биссектрисе угла

- **Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону пополам.**

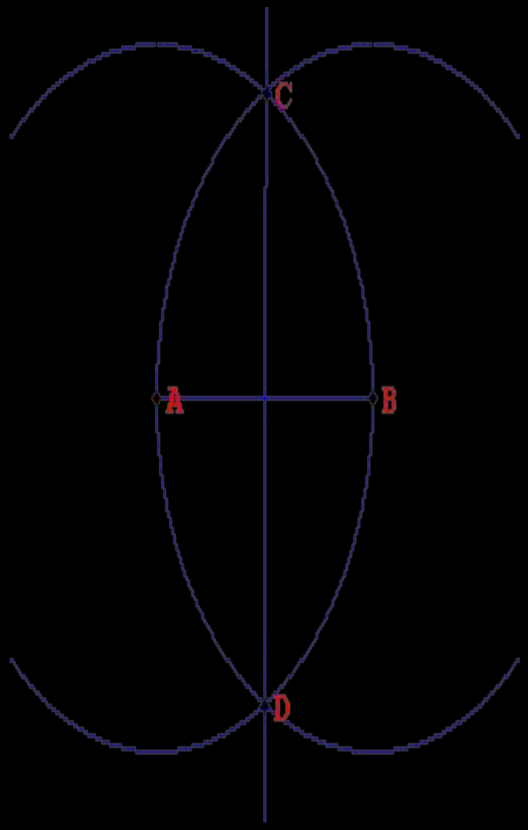


Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

- Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.
  Действительно, рассмотрим сначала точку P пересечения двух биссектрис, например AK1 и BK2. Эта точка одинаково удалена от сторон AB и AC, так как она лежит на биссектрисе угла A, и одинаково удалена от сторон AB и BC, как принадлежащая биссектрисе угла B. Значит, она одинаково удалена от сторон AC и BC и тем самым принадлежит третей биссектрисе CK3, то есть в точке P пересекаются все три биссектрисы.
  Свойства биссектрис внутреннего и внешнего углов треугольника

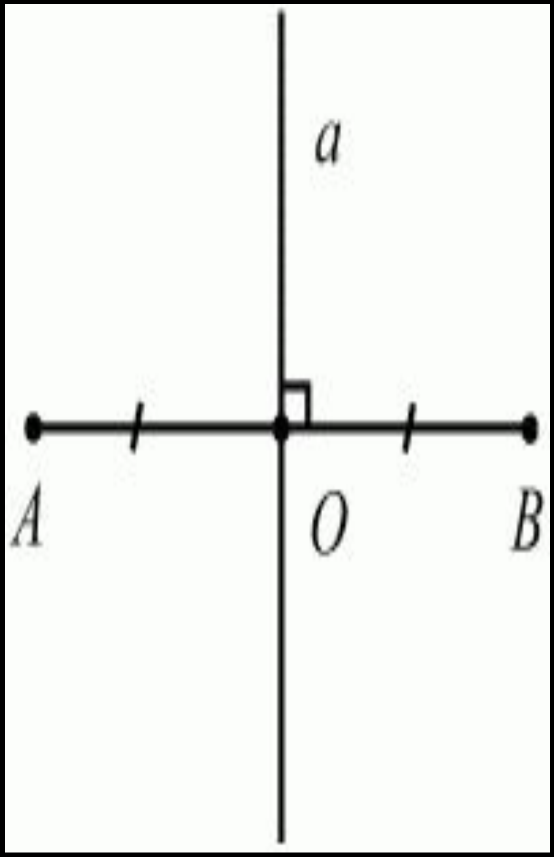

B
P1
P3
K1
K3
P
A
P2
K2
C

- Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину данного отрезка и перпендикулярна к нему.



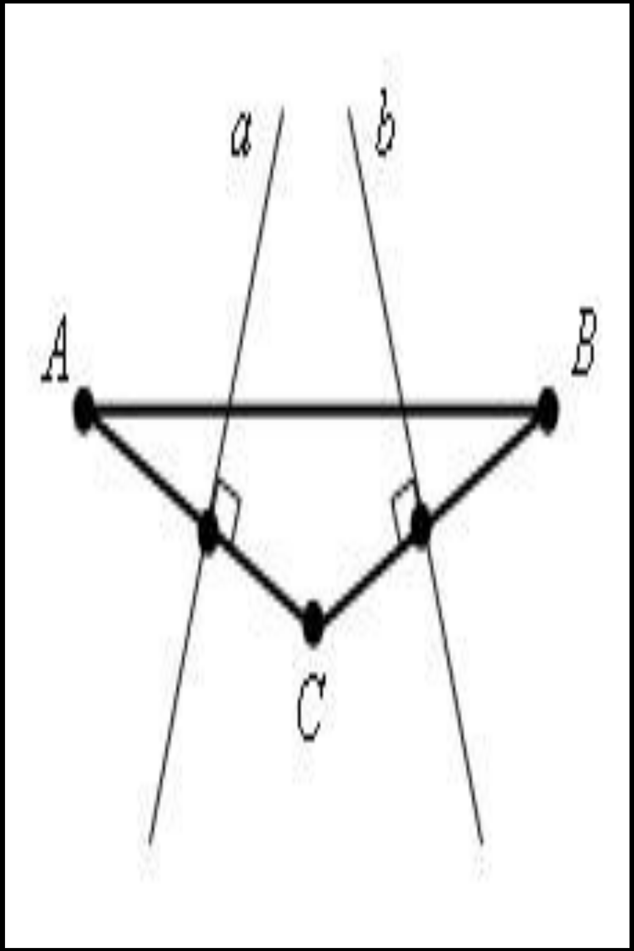
Теорема о серединном перпендикуляре к отрезку

- Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка.
- Обратная: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.



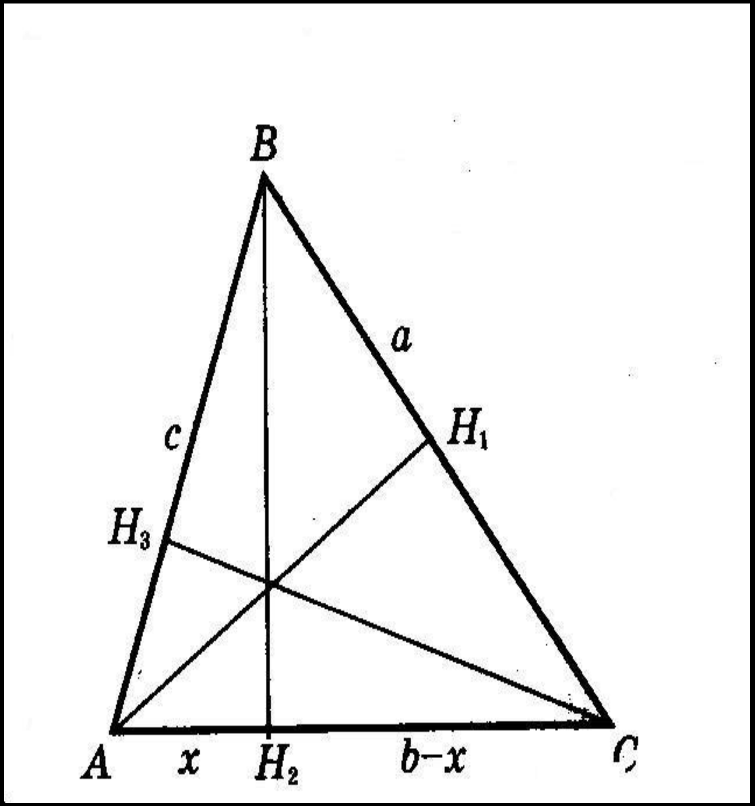
- **Доказательство.**

  Пусть есть Δ ABC и прямые a, b - серединные перпендикуляры к сторонам этого треугольника. Допустим, прямые a и b не пересекаются, а значит a || b. AC ⊥ a, BC ⊥ b, а значит BC ⊥ a, так как a || b. Таким образом, обе прямые AC и BC ⊥ a, а значит параллельны. А это не верно, так как AC и BC пересекаются в точке C. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

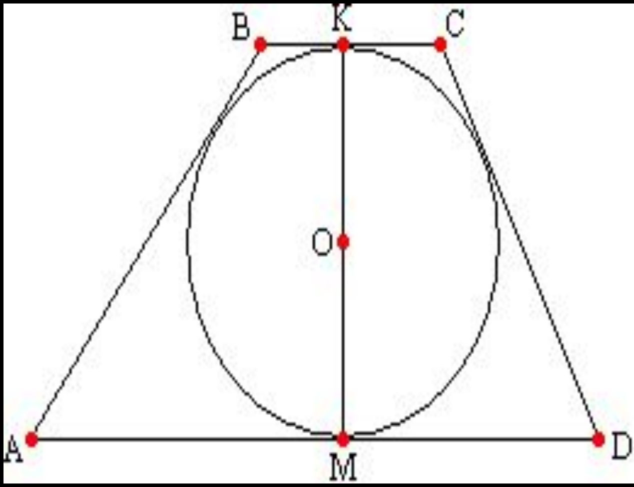


Теорема о пересечении высот треугольника.

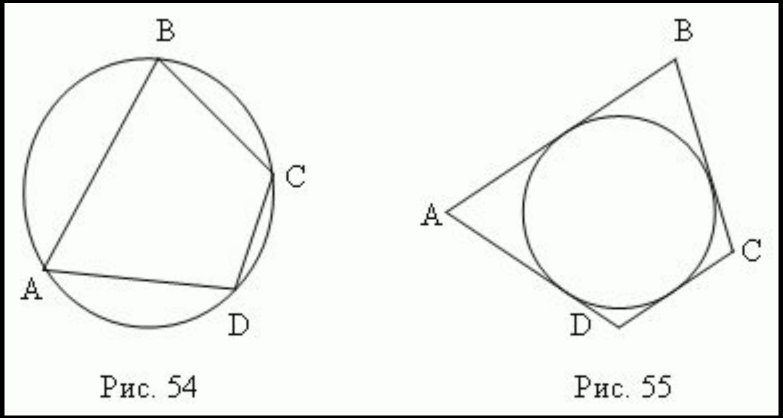
- Высоты треугольника(или их продолжения) пересекаются в одной точке.



Окружность, вписанная в многоугольник и описанный многоугольник.

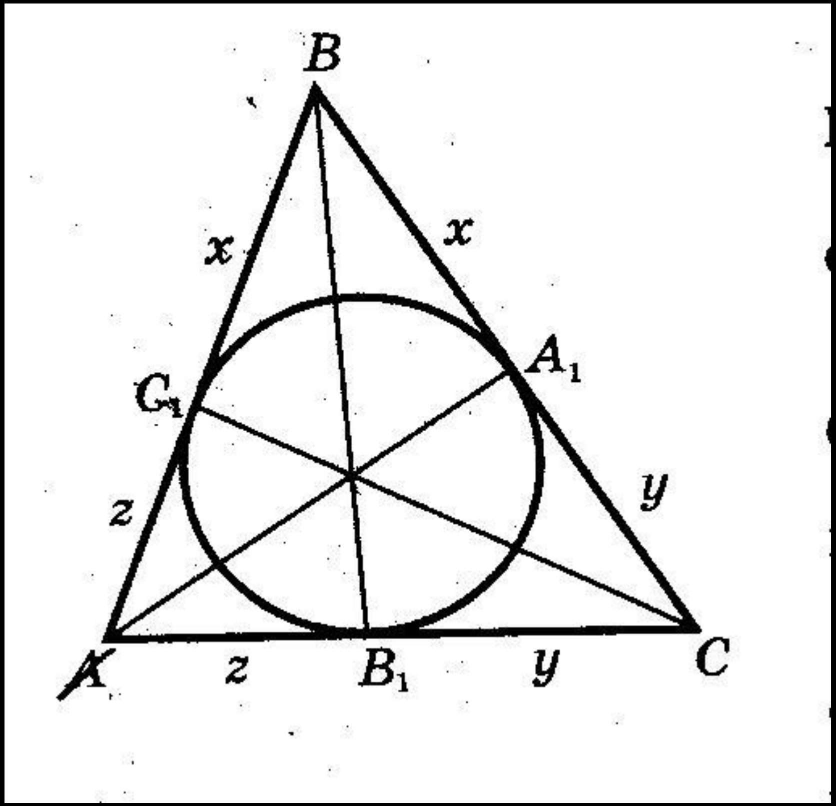


- Вписанная окружность, это такая окружность у которой все стороны многоугольника касаются окружности.
- Многоугольник называется описанным около вписанной окружности



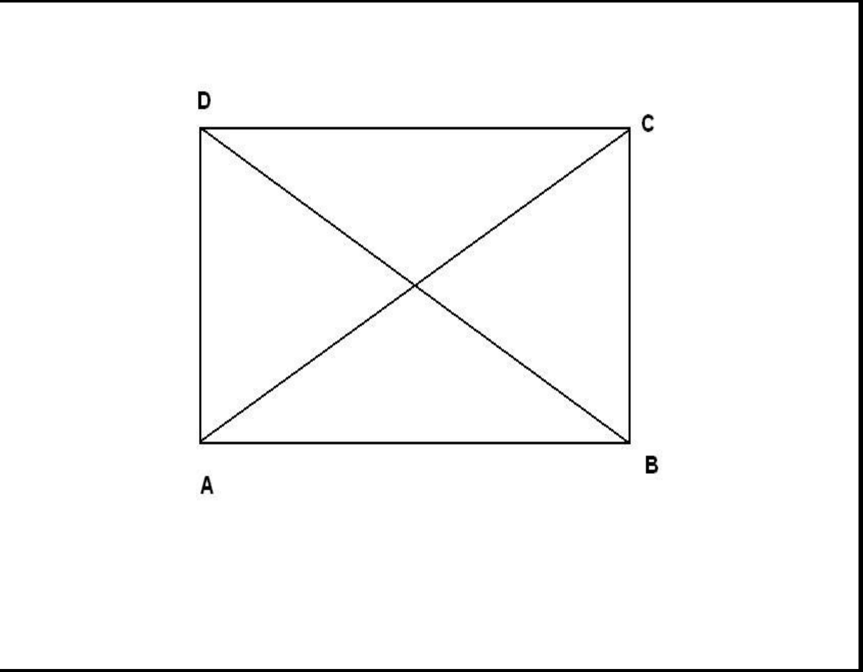
Теорема об окружности, вписанной в треугольник.

- В любой треугольник можно вписать окружность.
- Заметьте, что в треугольник можно вписать только ОДНУ окружность.



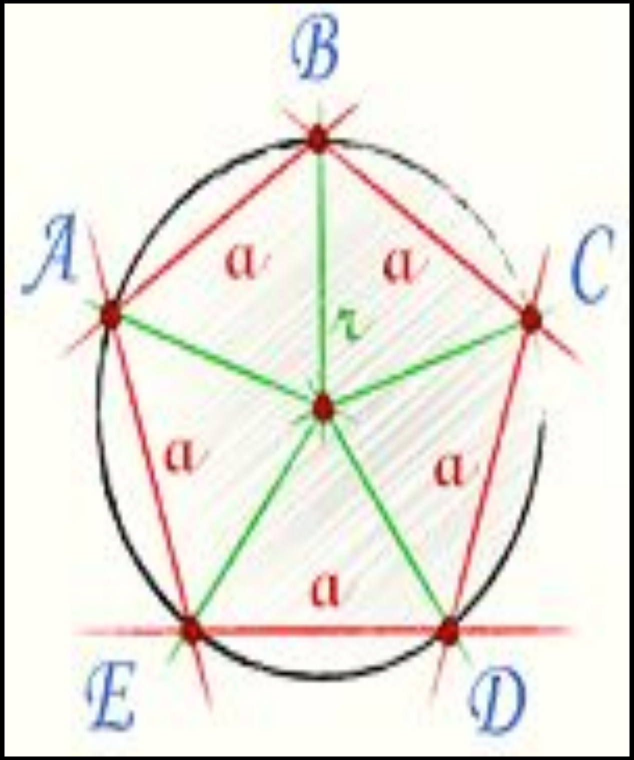
Свойства сторон четырехугольника, описанного около окружности.

- 1) В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны.
- 2) Если суммы противоположных сторон выпуклого четырехугольника равны,то в него можно вписать окружность.



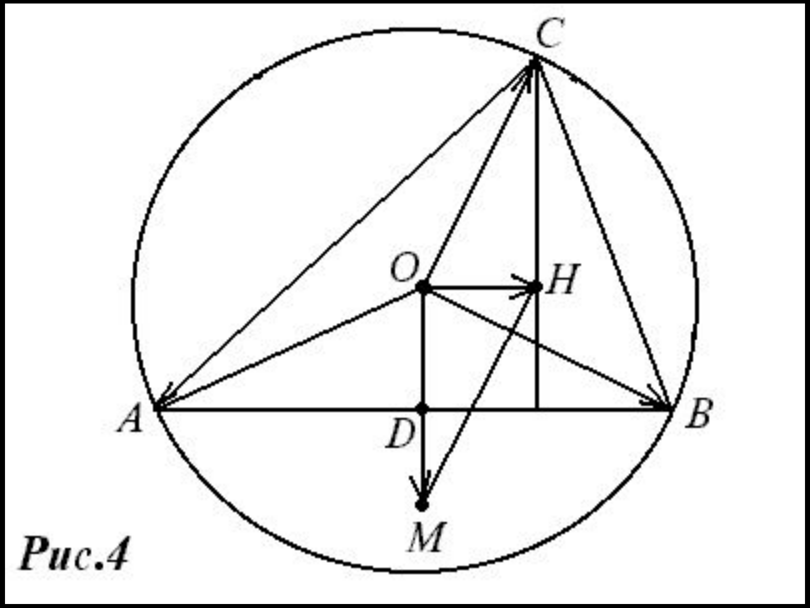
Описанная окружность и многоугольник, вписанный в окружность.

- Если все вершины многоугольника лежат на окружности, то окружность называется описанной, около многоугольника, а многоугольник будет называться вписанным.



Теорема об окружности, описанной около треугольника

- Около любого треугольника можно описать только одну окружность.
- Заметьте, что около треугольника можно описать только одну окружность!



Свойства углов четырехугольника, вписанного в окружность

- В любом вписанном четырехугольнике сумма противоположных углов равна 180 градусам.

  Если сумма противоположных углов четырехугольника равна 180 градусам, то около него можно описать окружность.