

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Лекция 4

Уравнение первого порядка

Функциональное уравнение

$F(x, y, y') = 0$ или $y' = f(x, y)$, связывающее между собой независимую

переменную, искомую функцию $y(x)$ и ее производную $y'(x)$, называется

дифференциальным уравнением первого порядка.

Решение дифференциального уравнения

Решением уравнения первого порядка называется всякая функция $y=\phi(x)$, которая, будучи подставлена в уравнение вместе со своей производной $y'=\phi'(x)$, обращает его в тождество относительно x .

Общее решение дифференциального уравнения 1-го порядка

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется такая функция $y = \phi(x, C)$, которая при любом значении параметра C является решением этого дифференциального уравнения.

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, определяющее общее решение как неявную функцию, называется *общим интегралом* дифференциального уравнения первого порядка.

Уравнение, разрешенное относительно производной

Если уравнение 1-го порядка разрешить относительно производной, то оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y)$$

Его общее решение геометрически представляет собой семейство интегральных кривых, т. е. совокупность линий, соответствующих различным значениям постоянной C .

Постановка задачи Коши

Задача отыскания решения
дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad ,$$

удовлетворяющего начальному условию

$y = y_0$ при $x = x_0$, называется
*задачей Коши для уравнения 1-го
порядка.*

Геометрически это означает: найти интегральную кривую дифференциального уравнения

$$y' = f(x, y) \quad ,$$

проходящую через данную точку

$$M_0(x_0, y_0) \quad .$$

Уравнение с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$f(x)dx = g(y)dy$$

называется уравнением с *разделенными переменными.*

Дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с *разделяющимися переменными*, если оно имеет вид:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \quad .$$

Для решения уравнения делят обе его части на произведение функций

$$N_1(y)M_2(x) \quad ,$$

а затем интегрируют.

Пример

Разделим переменные в уравнении

$$(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$$

$$\frac{xdx}{1 + x^2} = -\frac{dy}{1 + y^2}$$

Интегрируем: $\frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = -\int \frac{dy}{1 + y^2}$

Имеем: $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) = -\arctgy + C.$

Понятие однородной функции

Функция $z=f(x,y)$ называется *однородной порядка k* , если при умножении ее аргументов на t получаем:

Если $k=0$, то *имеем функцию нулевого порядка*. Например, функция

нулевого порядка $\frac{x+y}{x-y}$

Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если его можно привести к виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ или к виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного порядка .

Пример

Решить уравнение

$$xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

Линейные уравнения 1-го порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если оно содержит y и y' в первой степени, т.е. имеет вид

$$y' + P(x)y = Q(x) .$$

Решают такое уравнение с помощью подстановки $y=uv$, где u и v - вспомогательные неизвестные функции, которые находят, подставляя в уравнение вспомогательные функции и на одну из функций налагают определенные условия.

Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение 1-го порядка, имеющее вид

$$y' + P(x)y = Q(x)y^m$$

где $m \neq 0$ и $m \neq 1$

Его, как и линейное уравнение решают с помощью подстановки

$$y = UV$$

Пример

Решить уравнения

$$1) \quad y' - \frac{y}{x+1} = e^x (x+1)$$

$$2) \quad y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{y}$$