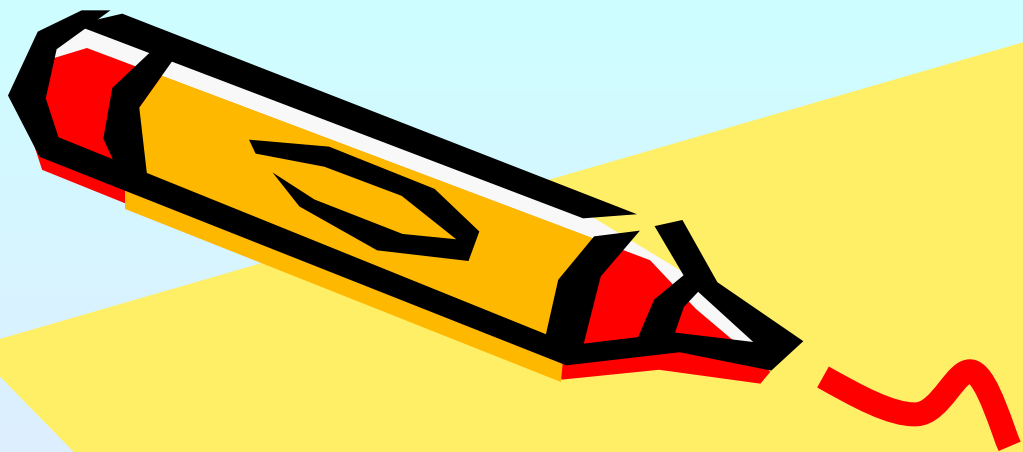
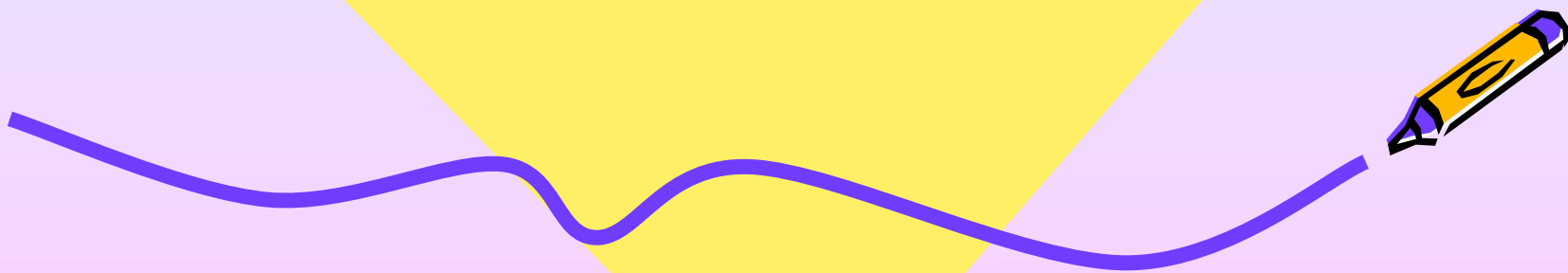




Объем прямой призмы

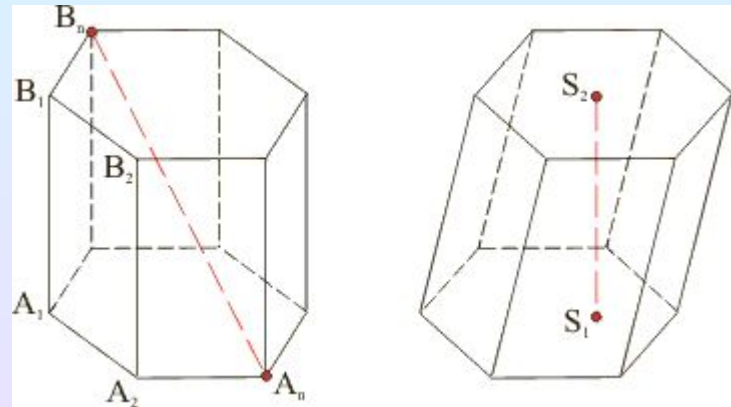


Цели урока:

- Вспомнить понятие призмы.
- Изучить теорему об объеме призмы.
- Провести доказательство.
- Применить полученные знания на практике.



- **Призма** – многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммо





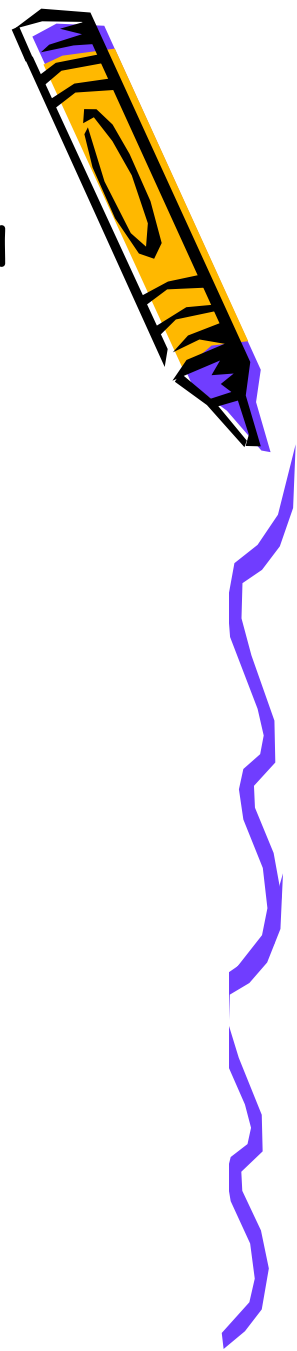
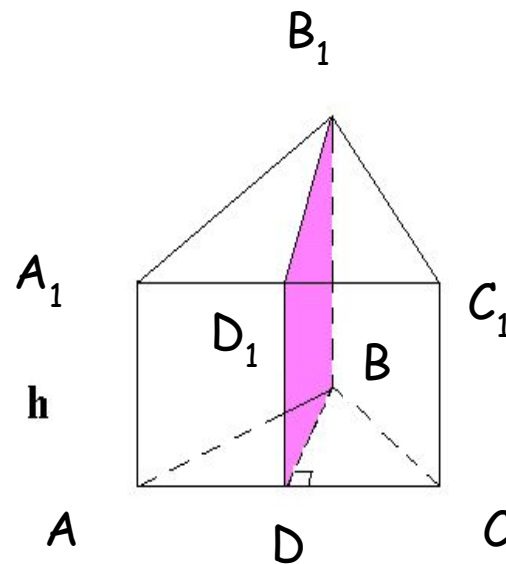
- Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**.
- Прямая призма называется **правильной**, если её основания - правильные многоугольники.



Теорема: Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту

- Доказательство**

Сначала докажем теорему для прямоугольной призмы, а затем - для произвольной прямой призмы.

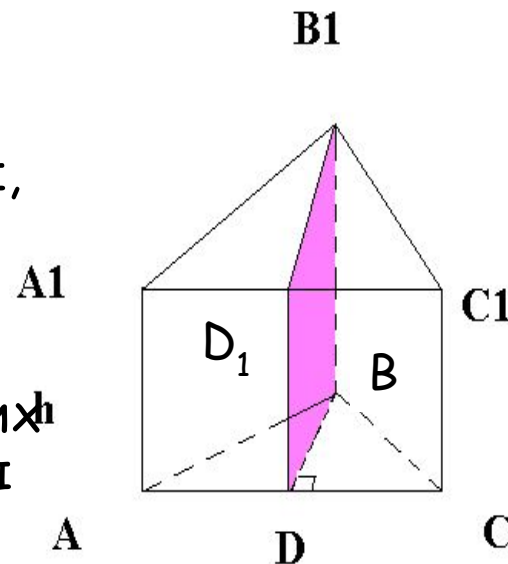
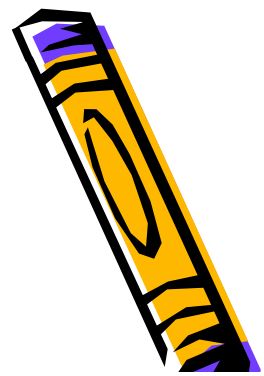


- 1) Рассмотрим прямую треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ с объёмом V и высотой h .
- 2) Проведем такую высоту треугольника ABC (на рис. BD), которая разделяет этот треугольник на два треугольника.

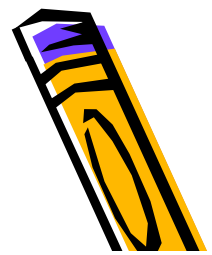
- 3) Плоскость BB_1D разделяет данную призму на 2 призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники ABD и BDC .
- 4) Поэтому объёмы V_1 и V_2 этих призм соответственно равны $S_{ABD} \cdot h$ и $S_{BDC} \cdot h$. По свойству 2° объёмов $V = V_1 + V_2$, т.е.
 $V = S_{ABD} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$.

Таким образом,
 $S_{ABC} \cdot h$.

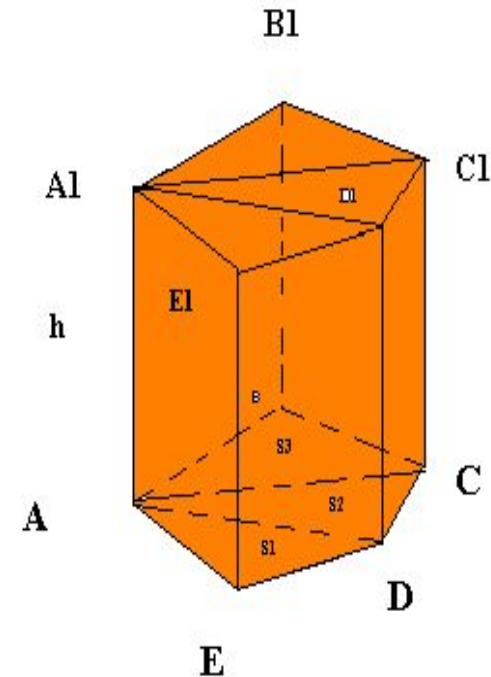
$$V = \boxed{V = S_{ABC} \cdot h}$$



Теорема для произвольной прямой призмы с высотой h и площадью основания S .



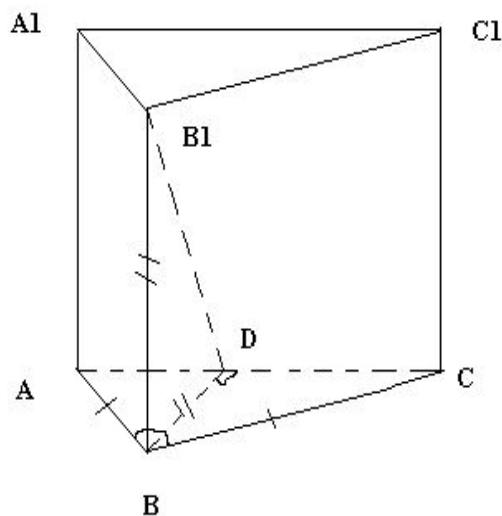
- Такую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой h . На рис. изображена пятиугольная призма, которая разбита на три прямоугольные призмы.
- Выразим объем каждой прямоугольной призмы по формуле $V = S_{ABC} \cdot h$ и сложим эти объемы. Мы вынесем за скобки общий множитель h , потом получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т.е. площадь S основания исходной призмы.



Таким образом, объем исходной призмы равен произведению $S \cdot h$.



Задача



• Дано: $ABCA_1B_1C_1$ -
прямая призма.

$AB=BC=m; \angle ABC = \varphi,$

BD - высота в $\triangle ABC$;

$BB_1=BD$.

Найти: $V_{ABCA_1B_1C_1}$ -?



Решение:



- 1) $S_{ABC} \cdot h, h = BB_1.$
- 2) Рассмотрим $\triangle ABC$; $\triangle ABC$ - р/б. BD - высота $\triangle ABC$, следовательно медиана и биссектриса.

$$\angle ABD = \angle DBC = \varphi/2$$

- 3) Рассмотрим $\triangle ABD$; $\triangle ABD$ - прямоугольный. Из соотношения в $\triangle$: $\cos \varphi/2 = BD/AB \Rightarrow BD = \cos \varphi/2 AB$, $BD = m \cos \varphi/2$ ($AB = m$)

- 4) Т.к. $BD = BB_1 \Rightarrow BB_1 = m \cdot \cos \varphi / 2$

- 5) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \varphi$; $S_{ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \varphi \Rightarrow$

- 6) $V = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \varphi \cdot m \cos \varphi/2 = \frac{1}{2} m^3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi/2$

Ответ: $\frac{1}{2} m^3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi/2$



Задача 1

Дано:

Правильная n-угольная призма

a — ребро

призмы

а) $n = 3$

б) $n = 4$

в) $n = 6$

г) $n = 8$

Найти: V

Решение:

а) $n = 3$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

б) $n = 4$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

в) $n = 6$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

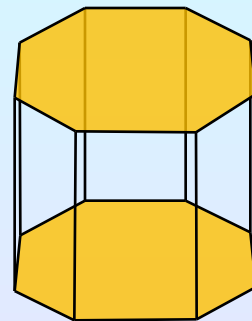
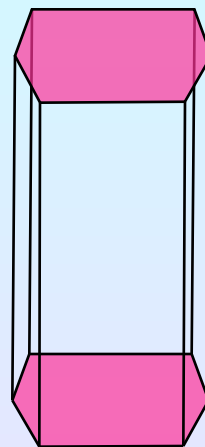
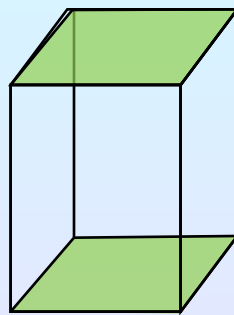
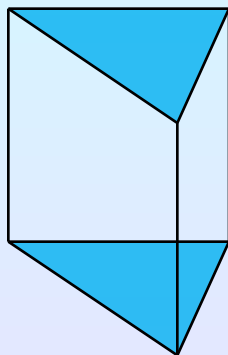
г) $n = 8$

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot a$$



Задача 2

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ —
правильная треугольная призма

a — сторона призмы

(ABC_1) — сечение

$(ABC_1) \wedge (ABC) = 60^\circ$

Найти: V

Решение:

$CK \perp AB$

$C_1K \in (AC_1B)$

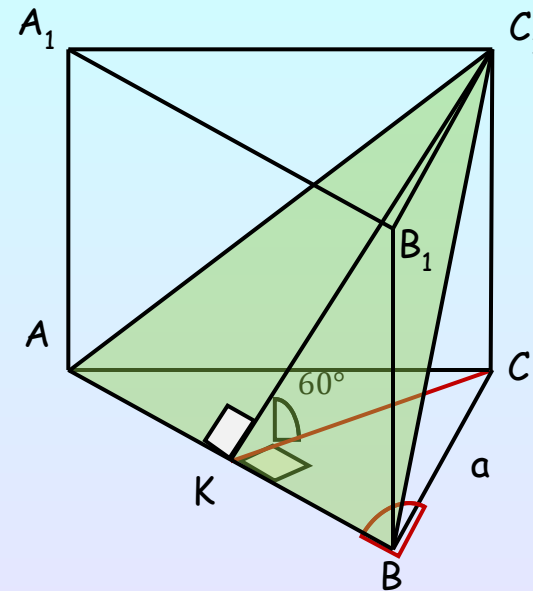
$C_1K \perp AB, \angle C_1KC = 60^\circ$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \quad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

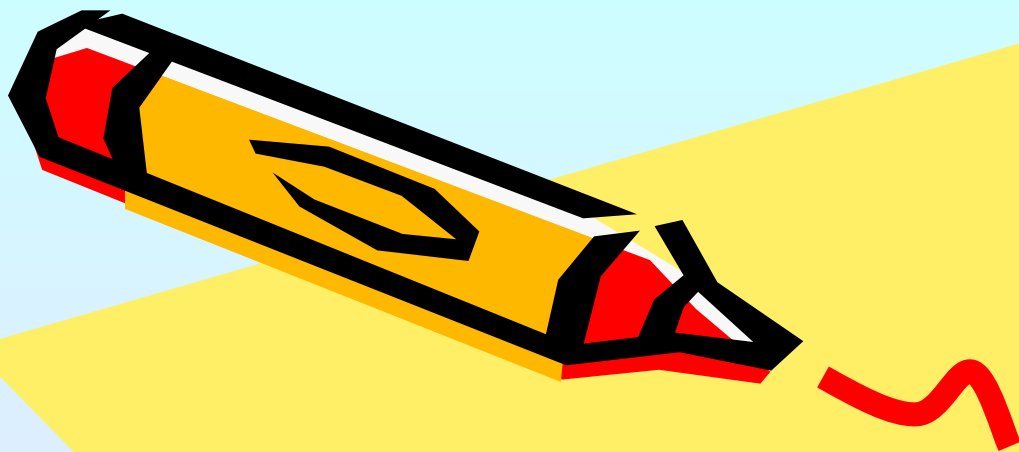
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$



$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$



СПАСИБО ЗА
ВНИМАНИЕ =)

