

О теореме Пифагора и способах её доказательства

- Введение

- Теорема Пифагора

- Пифагоровы тройки

- Алгебраические доказательства теоремы:

- Первое доказательство.

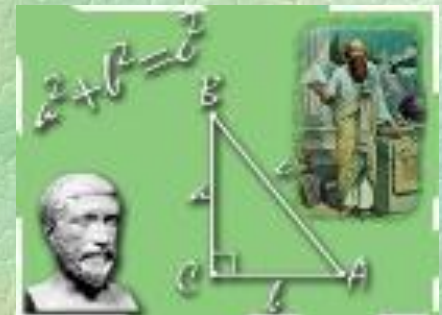
- Второе доказательство.

- Не алгебраические доказательства теорем:

- Простейшее доказательство.

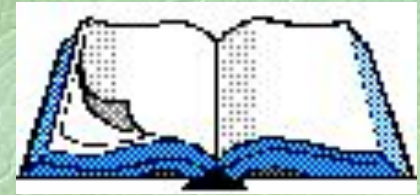
- Древнекитайское доказательство.

- Древнеиндийское доказательство.



Введение

Сказка «Дом»

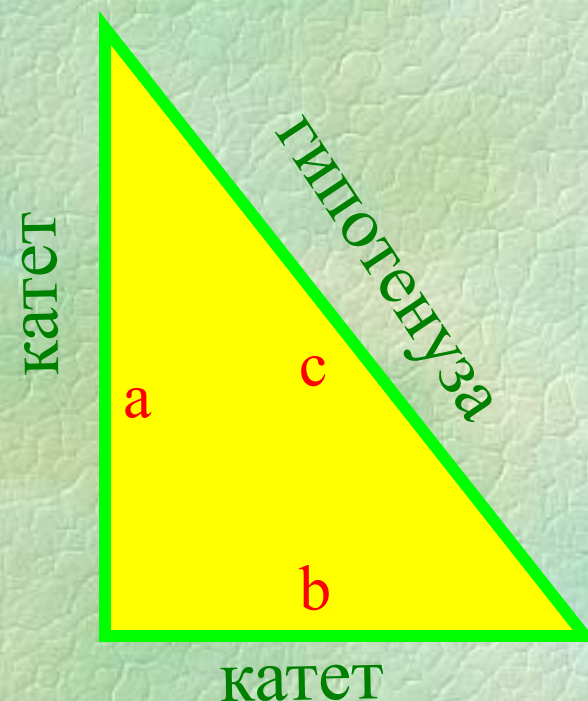


Далеко-далеко. Куда не летают даже самолёты, находится страна Геометрия. В этой необычной стране был удивительный город-город Теорем. Однажды в этот город пришла красивая девочка по имени Гипотенуза. Она попробовала снять комнату, но куда бы она не обращалась, ей всюду отказывали. Наконец она подошла к покосившемуся домику и постучала. Ей открыл мужчина, назвавший себя Прямым Углом, и он предложил Гипотенузе поселиться у него. Гипотенуза осталась в доме, в котором жили Прямой Угол и два его маленьких сына по имени Катеты. С тех пор жизнь в доме Прямого Угла пошла по-новому. На окошке Гипотенуза посадила цветы. А в палисаднике развела розы. Дом принял форму прямоугольного треугольника. Обоим Катетам, Гипотенуза очень понравилась и они попросили её остаться навсегда в их доме. По вечерам эта дружная семья собирается за семейным столом. Иногда Прямой Угол играет со своими детишками в прятки. Чаще всего искать приходится ему, а Гипотенуза прячется так искусно, что найти её бывает очень трудно. Однажды во время игры Прямой угол заметил интересное свойство: если ему удастся найти катеты, то отыскать Гипотенузу не составляет труда. Так Прямой Угол пользуется этой закономерностью, надо сказать, очень успешно. На свойстве этого прямоугольного треугольника и основана теорема

Теорема Пифагора

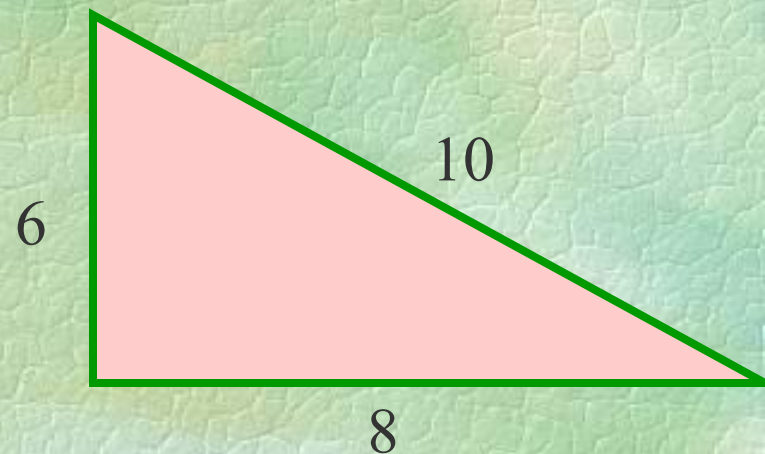
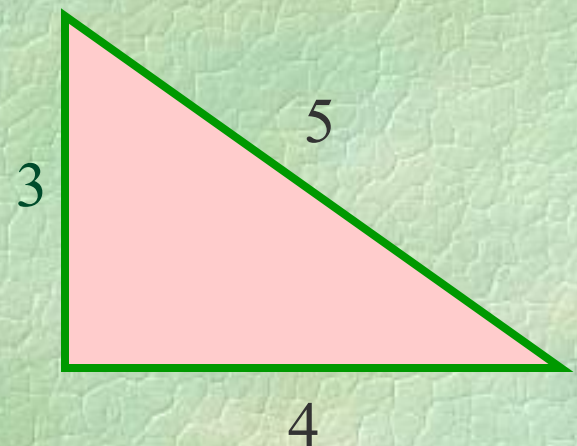
В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Египетский треугольник. Треугольник Пифагора.

- Прямоугольный треугольник со сторонами 3,4 и 5 имел когда-то большое практическое применение. В частности с помощью его строили прямые углы. Треугольник со сторонами 3, 4 и 5 называли египетским.
- Треугольники со сторонами, выраженными целыми числами, называют пифагоровыми. Пр. 5, 12 и 13. Таких треугольников множество, их стороны находят по формулам: m^2+n^2 , m^2-n^2 , $2mn$, причем $m \neq n$.

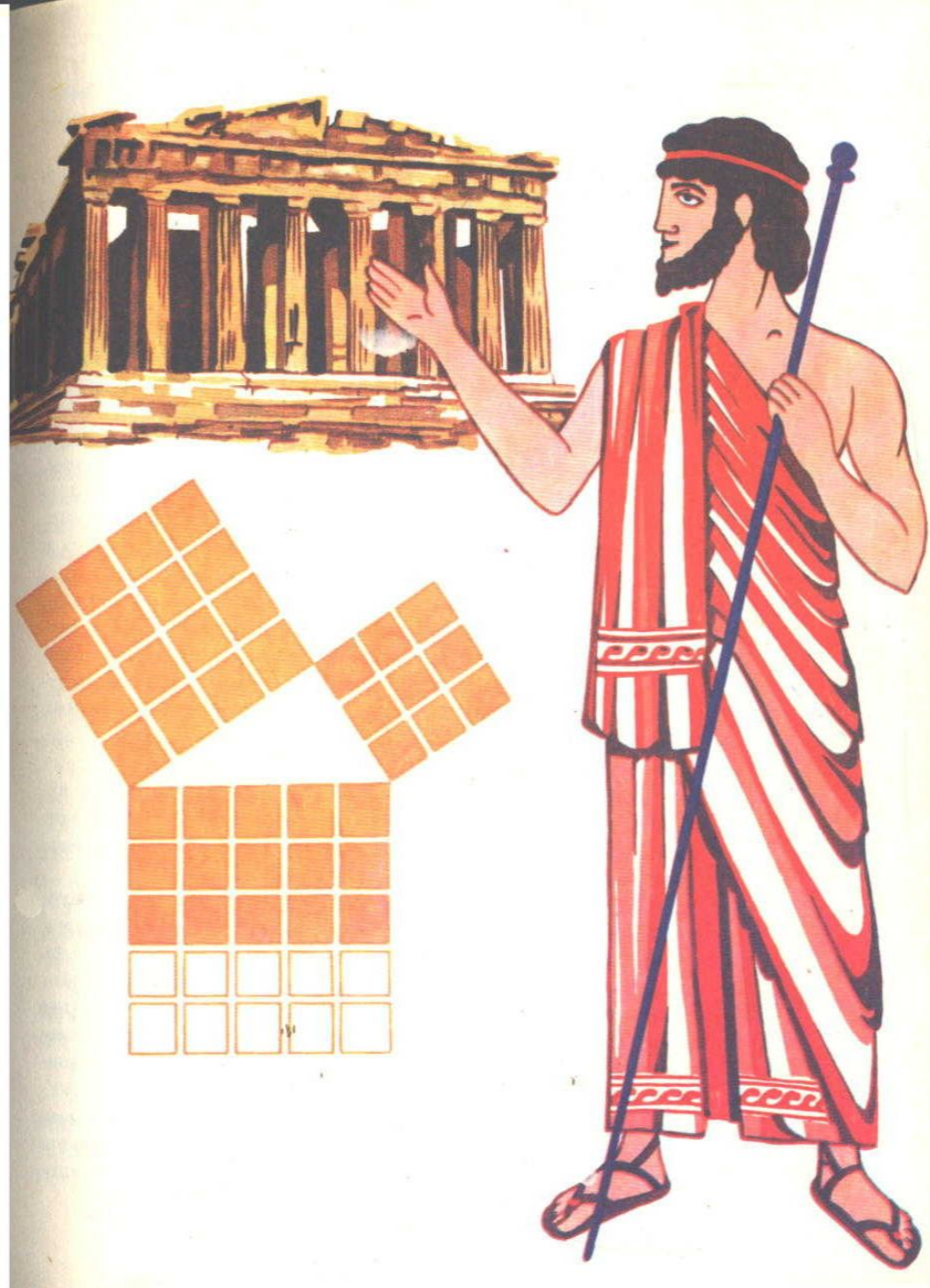


«Пифагоровы тройки»

- Пифагоровы числа или пифагоровы тройки. Это великое открытие пифагорейских математиков.
- Тройки чисел таких, что $a^2+b^2=c^2$.
- Интересные особенности этих чисел:
 - Один из «катетов» должен быть кратным трём.
 - Один из «катетов» должен быть кратным четырём.
 - Одно из Пифагоровых чисел должно быть кратно пяти.

a	3	5	6	7	9	11	13	15	17	19
b	4	12	8	24	40	60	84	112	114	180
c	5	13	10	25	41	61	85	113	145	181

Рассмотрим некоторые классические доказательства теоремы Пифагора, известные из древних трактатов. Сделать это полезно еще и потому, что в современных школьных учебниках дается алгебраическое доказательство теоремы. При этом бесследно исчезает первозданная геометрическая аура теоремы, теряется та нить Ариадны, которая вела древних мудрецов к истине, а путь этот почти всегда оказывался кратчайшим и всегда красивым. Итак, доказательства теоремы Пифагора.



Алгебраические доказательства теоремы

• Предисловие.

Еще давно была изобретена головоломка, называемая сегодня “Пифагор”. Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладываемые в квадрат. Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора. Далее рассмотрим несколько алгебраических доказательств теоремы.



Первое доказательство. (алгебраическое)

Пусть T —прямоугольный треугольник с катетами a , b и гипотенузой c (рис. 6, а).

Докажем, что $c^2 = a^2 + b^2$.

Построим квадрат Q со стороной $a+b$ (рис. 6, б). На сторонах квадрата Q возьмем точки A , B , C , D так, чтобы отрезки AB , BC , CD , DA отсекали от квадрата Q прямоугольные треугольники T_1 , T_2 , T_3 , T_4 с катетами a и b . Четырехугольник $ABCD$ обозначим буквой P . Покажем, что P — квадрат со стороной c .

Все треугольники T_1 , T_2 , T_3 , T_4 равны треугольнику T (по двум катетам). Поэтому их гипотенузы равны гипотенузе треугольника T , т. е. отрезку c . Докажем, что все углы этого четырехугольника прямые.

Пусть α и β — величины острых углов треугольника T . Тогда, как вам известно, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Угол у вершине A четырехугольника P вместе с углами, равными α и β , составляет развернутый угол.

Поэтому $\alpha + \beta = 180^\circ$. И так как $\alpha + \beta = 90^\circ$, то $\gamma = 90^\circ$. Точно так же доказывается, что и остальные углы четырехугольника P прямые. Следовательно, четырехугольник P — квадрат со стороной c .

Квадрат Q со стороной $a+b$ складывается из квадрата P со стороной c и четырех треугольников, равных треугольнику T . Поэтому для их площадей выполняется равенство $S(Q) = S(P) + 4S(T)$.

Так как $S(Q) = (a+b)^2$; $S(P) = c^2$ и $S(T) = 1/2(ab)$, то, подставляя эти выражения в $S(Q) = S(P) + 4S(T)$, получаем равенство $(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot (1/2)ab$.

Поскольку $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, то равенство

$$(a+b)^2 = c^2 + 4 \cdot (1/2)ab$$

можно записать так: $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$.

Из равенства $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$ следует,

что $c^2 = a^2 + b^2$. Ч.Т.Д.

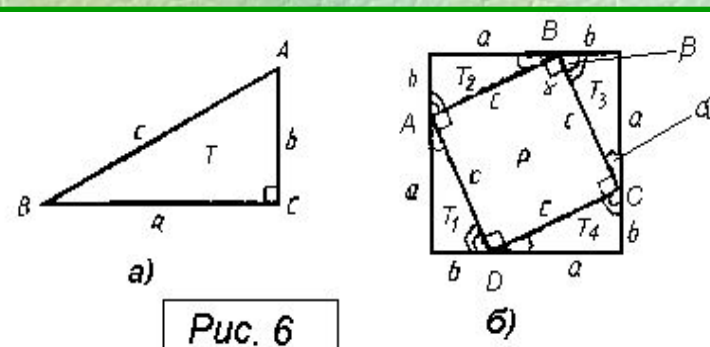


Рис. 6

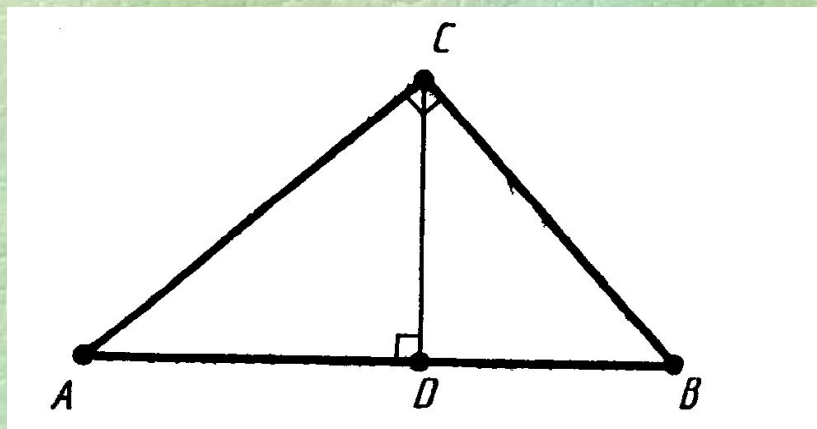
Второе доказательство. (алгебраическое)

Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник с прямым углом C . Проведем высоту CD из вершины прямого угла C

По определению косинуса угла (*Косинусом* острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе) $\cos A = AD/AC = AC/AB$.

Отсюда $AB \cdot AD = AC^2$. Аналогично $\cos B = BD/BC = BC/AB$. Отсюда $AB \cdot BD = BC^2$. Складывая эти равенства почленно и замечая, что $AD + DB = AB$, получим:

$AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$. Теорема доказана.



Не алгебраические доказательства теоремы.

Простейшее доказательство.

Квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах."

Простейшее доказательство теоремы получается в простейшем случае равнобедренного прямоугольного треугольника. Вероятно, с него и начиналась теорема. В самом деле, достаточно просто посмотреть на мозаику равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 1), чтобы убедиться в справедливости теоремы. Например, для $\triangle ABC$: квадрат, построенный на гипотенузе AC , содержит 4 исходных треугольника, а квадраты, построенные на катетах,— по два. Теорема доказана.

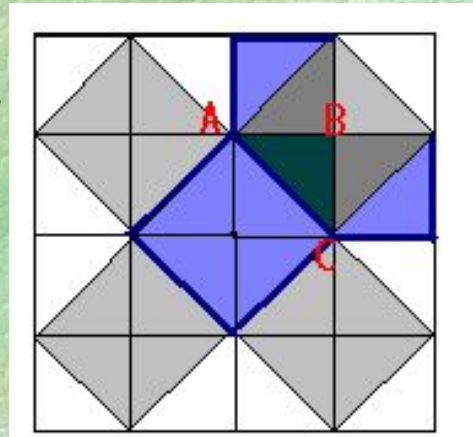


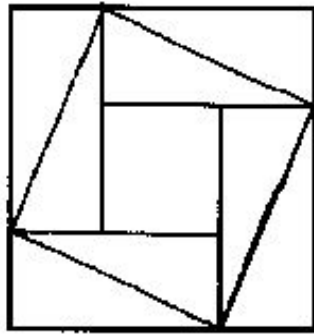
Рис.1

Древнекитайское доказательство. (не алгебраическое) Предисловие.

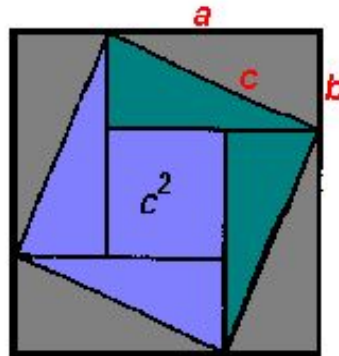
- Математические трактаты Древнего Китая дошли до нас в редакции II в. до н.э. Дело в том, что в 213 г. до н.э. китайский император Ши Хуан-ди, стремясь ликвидировать прежние традиции, приказал сжечь все древние книги. Во II в. до н.э. в Китае была изобретена бумага и одновременно начинается воссоздание древних книг. Так возникла тематика в девяти книгах” — главное из сохранившихся математик - астрономических сочинений в книге “Математики” помещен чертеж ,доказывающий теорему Пифагора. Ключ к этому доказательству подобрать нетрудно.



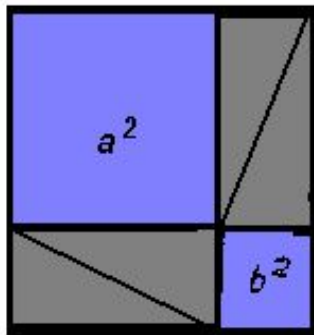
Древнекитайское доказательство.



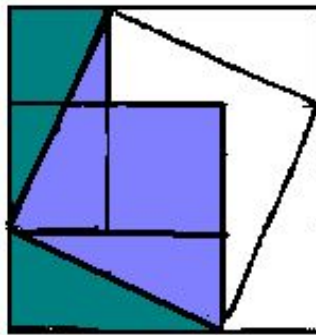
а)



б)



в)



г)

В самом деле, на древнекитайском чертеже четыре равных прямоугольных треугольника с катетами a , b и гипотенузой c уложены так, что их внешний контур образует квадрат со стороной $a+b$, а внутренний — квадрат со стороной c , построенный на гипотенузе (рис. б). Если квадрат со стороной c вырезать и оставшиеся 4 затушеванных треугольника уложить в два прямоугольника (рис. в), то ясно, что образовавшаяся пустота, с одной стороны, равна c^2 , а с другой — a^2+b^2 , т.е. $c^2=a^2+b^2$. Теорема доказана.

Древнеиндийское доказательство.

Математики Древней Индии заметили, что для доказательства теоремы Пифагора достаточно использовать внутреннюю часть древнекитайского чертежа. В написанном на пальмовых листьях трактате “Сиддханта широмани” (“Венец знания”) крупнейшего характерным для индийских доказательств словом “**Смотри!**”. Как видим, в квадрате индийского математика XII в. Бхаскары помещен чертеж с со стороной $a+b$ изображали четыре прямоугольных треугольника с катетами длин a и b (рис.1и2). После чего писали одно слово “**Смотри!**”. И действительно, взглянув на эти рисунки, видим, что слева свободна от треугольников фигура, состоящая из двух квадратов со сторонами a и b , соответственно её площадь равна a^2+b^2 , а справа- квадрат со стороной c -его площадь равна c^2 . Значит, $a^2+b^2=c^2$, что и составляет утверждение теоремы Пифагора.

чертеж из
трактата
“Чжоу-би...”.

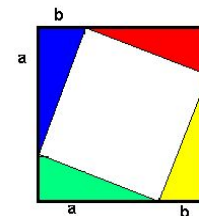
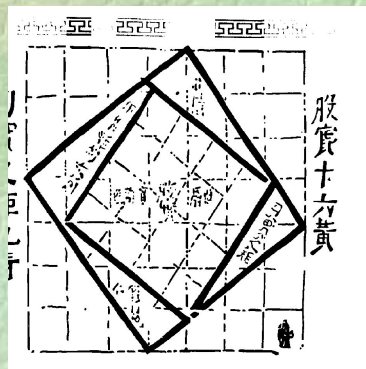


рис.1

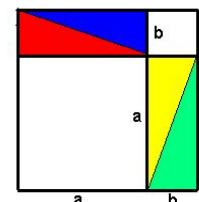
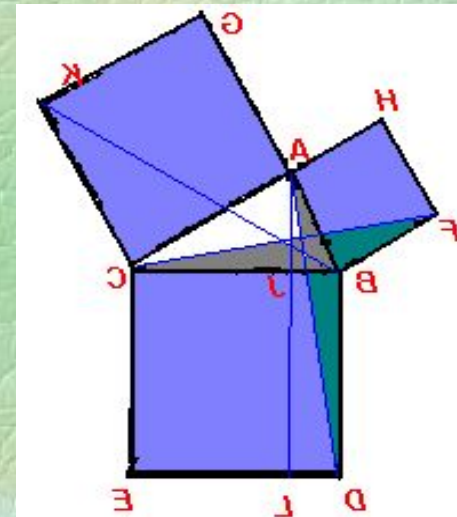


рис.2

Доказательство Евклида.

Доказательство Евклида приведено в предложении 47 первой книги “Начал”. На гипотенузе и катетах прямоугольного треугольника ABC строятся соответствующие квадраты и доказывается, что прямоугольник $BJLD$ равновелик квадрату $ABFH$, а прямоугольник $ICEL$ — квадрату $ACKG$. Тогда сумма квадратов на катетах будет равна квадрату на гипотенузе. В самом деле, затухеванные на рисунке треугольники ABD и BFC равны по двум сторонам и углу между ними: $FB=AB$, $BC=BD$ и $\angle FBC = \angle ABD$. Но $S_{ABD} = 1/2 S_{BJLD}$, так как у треугольника ABD и прямоугольника $BJLD$ общее основание BD и общая высота LD . Аналогично $S_{FBC} = 1/2 S_{ABFH}$ (BF —общее основание, AB —общая высота). Отсюда, учитывая, что $S_{ABD} = S_{FBC}$, имеем $S_{BJLD} = S_{ABFH}$. Аналогично, используя равенство треугольников BCK и ACE , доказывается, что $S_{JCEL} = S_{ACKG}$. Итак, $S_{ABFH} + S_{ACKG} = S_{BJLD} + S_{JCEL} = S_{BCED}$, что и требовалось доказать.



О доказательстве Евклида

- Доказательство Евклида в сравнении с древнекитайским или древнеиндийским выглядит чрезмерно сложным. По этой причине его нередко называли “ходульным” и “надуманным”. Но такое мнение поверхностно. Теорема Пифагора у Евклида является заключительным звеном в цепи предложений 1-й книги “Начал”. Для того чтобы логически безупречно построить эту цепь, чтобы каждый шаг доказательства был основан на ранее доказанных предложениях, Евклиду нужен был именно выбранный им путь.
- Еще давно была изобретена головоломка, называемая сегодня “Пифагор”. Нетрудно убедиться в том, что в основе семи частей головоломки лежат равнобедренный прямоугольный треугольник и квадраты, построенные на его катетах, или, иначе, фигуры, составленные из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и потому укладывающиеся в квадрат. Такова лишь малая толика богатств, скрытых в жемчужине античной математики — теореме Пифагора.

Заключение

В заключении еще раз хочется сказать о важности теоремы. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. К сожалению, невозможно здесь привести все или даже самые красивые доказательства теоремы, однако хочется надеется, что приведенные примеры убедительно свидетельствуют об огромном интересе сегодня, да и вчера, проявляемом по отношению к ней.

