

Неравенства и их решения

Неравенство

Решить неравенство.

Совокупность неравенств

Неравенства

```
graph TD; A[Неравенства] --> B[Алгебраические]; A --> C[Трансцендентные]; B --> D[рациональные]; B --> E[иррациональные];
```

Алгебраические

Трансцендентные

рациональные

иррациональные

Пример: Решить неравенство

$$\sqrt{24 - 10x + x^2} < x - 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-4 > 0, \\ (24-10x+x^2)(24-10x+x^2-(x-4)^2) < 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-4 > 0 \\ (x-4)(x-6)(x-4)(-2) < 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x-4 > 0, \\ (x-4)^2(x-6) > 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x=4 \\ x>6 \end{array} \right.$$

Ответ: $\{4\}; [6; +\infty)$

Методом интервалов:

1. Все члены неравенства переносятся в левую часть и приводятся к общему знаменателю.
2. Определить критические точки.
3. Критические точки наносятся на числовую прямую, прямая разбивается при этом на интервалы.
4. Определить знаки на интервалах.
5. . Множество решений неравенств объединяется интервалом с соответствующим знаком, при этом случае , если неравенство нестрогое ,то к этому множеству прибавляется корни числителя.

Линейные неравенства

– неравенства вида $ax > b$, $ax < b$,
 $ax \geq b$, $ax \leq b$, где a и b действительные
числа или выражения, зависящие от
параметров (ax – неизвестное)

Например, $(3 - \sqrt{10})(2x - 7) < 0$

$$6x - 21 - 2x\sqrt{10} + 7\sqrt{10} < 0$$

$$36x^2 + 441 + 40x^2 + 490 < 0$$

$$76x^2 + 931 < 0$$

$$x^2 < 12.25$$

$$x_1 = 3.5 \quad x_2 = -3.5$$

Пример:

$$(5 - a)x > a + 3$$

$$1. a > 5,$$

$$\text{тогда } x < \frac{a+3}{5-a}$$

$$2. a < 5,$$

$$\text{тогда } x > \frac{a+3}{5-a}$$

$$3. a = 5, x \in \emptyset$$

Квадратные неравенства

– это неравенства вида $ax^2 + b x + c > 0$,
где a, b, c – действительные числа

Если $a > 0$ и $D < 0$,

то $x \in \emptyset$

Если $a > 0$ и $D = 0$,

то $x \in (-\infty ; -b/2a) (-b/2a ; +\infty)$

Если $a > 0$ и $D > 0$,

то $x \in (-\infty ; x_1) (x_2 ; +\infty)$, где x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

Если $a < 0$ и $D < 0$,

то $x \in \emptyset$

Если $a < 0$ и $D = 0$,

то $x \in \emptyset$

Если $a < 0$ и $D > 0$,

то $x \in (x_1 ; x_2)$, x_1, x_2 - корни квадратного трехчлена.

Пример: $m x^2 - 2(m-1)x + (m+2)$

1. Пусть $m > 0$ и $D = (2-2m)^2 - 4m(m+2) = 1 - 12m < 0$;

нет решений

2. Пусть $m > 0$ и $D = 0$;

$m = 1/4$; уравнение имеет один корень.

3. Пусть $m > 0$ и $D > 0$, то есть $m \in (0; 1/4)$.

тогда $x \in (x_1; x_2)$, где $x_1 = 1/m [(m-1) - \sqrt{1-4m}]$, $x_2 = 1/m [(m-1) + \sqrt{1-4m}]$

4. Пусть $m < 0$ и $D = 4(1-4m) < 0$;

Тогда $m \in \emptyset$

5. Пусть $m < 0$ и $D = 4(1-4m) > 0$

$m \in \emptyset$

6. Пусть $m < 0$ и $D = 4(1-4m) > 0$, то есть $m \in (-\infty; 0)$

Тогда $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$