

Непрерывность функций

Лекция 3

Непрерывность

Функция $f(x)$, определенная на множестве X , называется *непрерывной* в точке x_0 , если $x_0 \in X$

1) она определена в этой точке,

2) существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и

3) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Условие непрерывности

Существование $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ равносильно тому,

что существуют равные друг другу левосторонний и правосторонний пределы функции при $x \rightarrow x_0$, равные к тому же и значению функции в точке, то есть

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность на множестве

Говорят, что функция ***непрерывна на множестве X*** , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Если функция непрерывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, то говорят, что она ***непрерывна на этом отрезке***, причем непрерывность в точке a понимается как непрерывность справа, а непрерывность в точке b — как непрерывность слева.

Непрерывность

Теперь переформулируем определение непрерывности в других терминах.

Обозначим $x - x_0 = \Delta x$ и назовем его **приращением аргумента** в точке x_0 ,

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta f(x_0) = \Delta y$$

будем называть **приращением функции** в точке .

Непрерывность

Теорема. Функция непрерывна в точке тогда и только тогда, когда бесконечно **малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции** в этой точке, то есть если

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Теоремы о непрерывных функциях

Теорема.

Пусть заданные на одном и том же множестве X функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0 .

Тогда функции

$$f(x) \pm g(x), \quad f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f(x)}{g(x)}$$

непрерывны в точке x_0 , если знаменатель не равен нулю в этой точке:

$$g(x_0) \neq 0$$

Теоремы о непрерывных функциях

***Теорема (о непрерывности
сложной функции).*** Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 , а функция $Z = f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = f(x_0)$. Тогда сложная функция $Z = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0 .

Непрерывность элементарных функций

Всевозможные арифметические комбинации простейших элементарных функций, которые рассматривают в школьном курсе алгебры и начал анализа, мы будем называть **элементарными функциями**. Например,

$$y = \sqrt{x^2 + 1} - \sin^2 x$$

является элементарной.

Все элементарные функции непрерывны в области определения

Разрывы функций

Дадим теперь **классификацию точек разрыва функций**. Возможны следующие случаи.

1. Если $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ существуют и конечны, но не равны друг другу, то точку x_0 называют **точкой разрыва первого рода**. При этом величину $[f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)]$ называют скачком функции в точке x_0 .

Пример

Исследовать на непрерывность функцию

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0 \\ x+1, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

Эта функция может претерпевать разрыв только в точке 0, где происходит переход от одного аналитического выражения к другому, а в остальных точках области определения функция непрерывна.

Решение

Из условия непрерывности следует:

$$\lim_{x \rightarrow -0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} x^2 = 0,$$

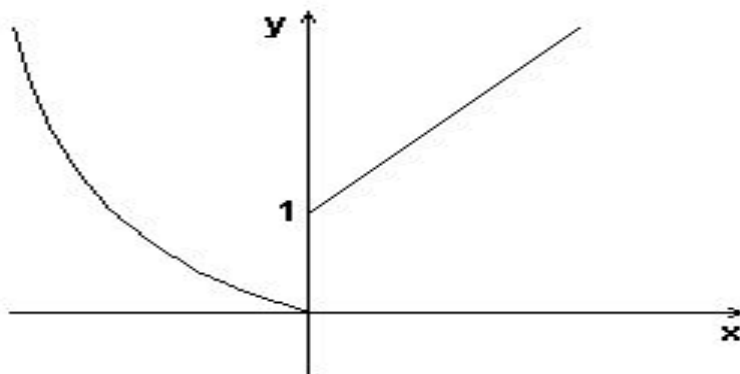
$$f(0) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow +0} (x + 1) = 1.$$

Таким образом, в точке 0 функция претерпевает разрыв 1-го рода со скачком 1.

График функции

На рисунке изображена функция, имеющая разрыв 1-го рода в начале координат.



Разрывы функций

2. Если в точке x_0 $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$, но в точке x_0 функция либо не определена, либо $f(x_0) \neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, то эта точка является **точкой устранимого разрыва**.

Последнее объясняется тем, что если в этом случае **доопределить** или **видоизменить** функцию, положив

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x),$$

то получится непрерывная в точке функция.

Разрывы функций

3. Точка разрыва функции, не являющаяся точкой разрыва первого рода или точкой устранимого разрыва, является **точкой разрыва второго рода**.

Очевидно, что точки разрыва второго рода - это точки, в которых функция стремится к бесконечности. Например, в точке $x=1$ имеет разрыв 2-го рода функция $y = \frac{1}{x-1}$.

Пример

Исследуем функцию $f(x) = 3^{\frac{1}{1-x}}$. Как элементарная функция она всюду непрерывна, кроме точки $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1+0}} = 3^{+\infty} = +\infty ,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{1}{1-x}} = 3^{\frac{1}{1-1-0}} = 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{+\infty}} = 0$$

Имеем разрыв 2-го рода с бесконечным скачком.

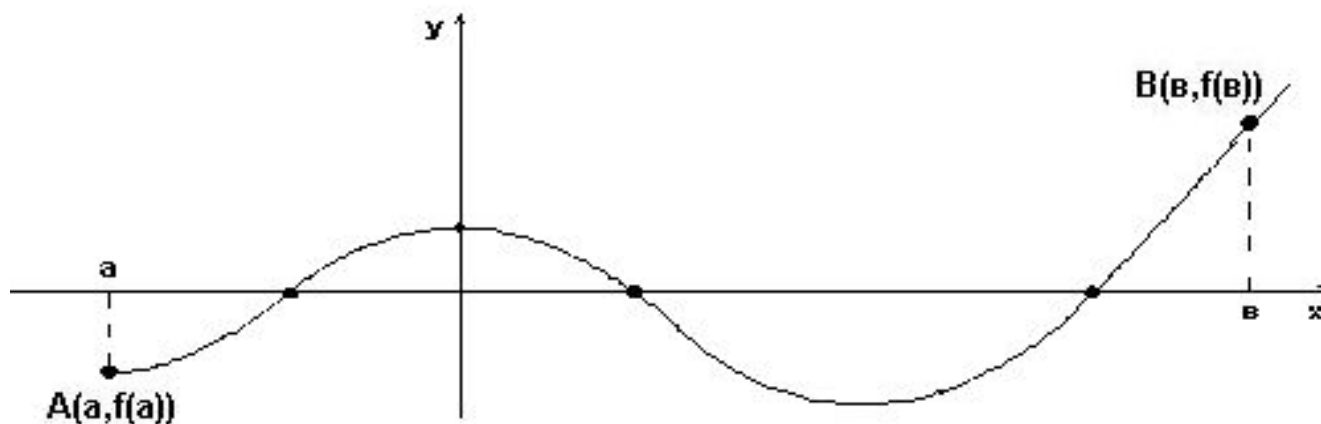
***Первая теорема Больцано-Коши об
обращении функции в нуль.*** Пусть

функция $f(x)$ определена и
непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на
концах этого отрезка принимает
значения различных знаков, т. е.

$f(a) \cdot f(b) < 0$. Тогда существует точка
 $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = 0$.

Проиллюстрируем теорему.

Из рисунка видно, что функция имеет три нуля, то есть три точки, в которых она обращается в нуль.



Вторая теорема Больцано-Коши о промежуточном значении

функции. Пусть функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на концах этого отрезка принимает неравные значения $f(a) \neq f(b)$. Тогда, каково бы ни было число μ между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется точка $c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = \mu$.

Теорема 1 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она на этом отрезке ограничена, то есть существуют числа m и M такие, что $m \leq f(x) \leq M$ для любого $x \in [a, b]$

Теорема 2 Вейерштрасса.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она достигает на этом отрезке своих наименьшего и наибольшего значений (то есть существуют такие x_1 и x_2 на отрезке $[a, b]$, что для любого $x \in [a, b]$, т. е. для $a \leq x \leq b$, выполняется условие

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad .$$