



Федеральное агентство по образованию  
«Пермский Национальный Исследовательский  
Политехнический Университет»  
Кафедра «Прикладной Математики»

Тема курсовой работы:  
«Нечеткие дифференциальные  
уравнения»

Проверил:  
к.ф.-м.н. доцент кафедры ПМ  
Севодин М.А.  
Выполнил:  
студент группы МИЭ-17-1м  
Паршаков Р.В.

# Основные определения нечетких дифференциальных уравнений (НДУ)

Определение 1.2: Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{f}(x, y) \quad (1.1)$$

будем называть нечетким дифференциальным уравнением первого порядка, если  $\tilde{f}(x, y)$  есть нечеткая функция.

Определение 1.3: Нечеткую функцию  $\tilde{\varphi}(x, \tilde{C})$ , зависящую от переменной дифференцирования и произвольной постоянной  $\tilde{C}$  (четкой либо нечеткой) будем называть общим решением уравнения (1.1), если:

- 1) Если она удовлетворяет данному уравнению при любых значениях  $\tilde{C}$ ;
- 2) Каково бы ни было начальное условие

$$\tilde{y}|_{x=x_0} = \tilde{y}_0 \quad (1.2)$$

всегда можно найти такое значение  $\tilde{C} = \tilde{C}_0$ , что функция  $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x, \tilde{C}_0)$  удовлетворяла бы начальному условию.

# Основные определения НДУ

---

Определение 1.4: Частным нечетким решением уравнения (1.1), удовлетворяющего начальному условию (1.2) будем называть нечеткую функцию  $\tilde{y} = \tilde{\varphi}(x)$ , которая удовлетворяет уравнению (1.1) и входит в семейство общего решения этого уравнения, т.е. существует такое нечеткое значение нечеткой постоянной  $\tilde{C}$ , что  $\tilde{\varphi}(x) = \tilde{\varphi}(x, \tilde{C}_0)$

Аналогично можно ввести понятие особого нечеткого решения уравнения (1.1).

# Основные определения НДУ

---

Как и в случае четких линейных дифференциальных уравнений, нечеткие линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка можно выразить в виде:

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{d^{n-k}}{dX^{n-k}} = \tilde{f}(x)$$

где  $a_k$  могут быть как постоянные (нечеткие числа), так и переменные (нечеткие величины);  $\tilde{f}(x)$  - может быть как четкой, так и нечеткой функцией.

# Решение НЛДУ первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \tilde{2}y + \tilde{6}; \tilde{y}|_{x=0} = \tilde{4}$$

$$\tilde{2} = \{2; 0,1; 0,2\}, \tilde{4} = \{4; 0,2; 0,1\}, \tilde{6} = \{6; 0,2; 0,1\}$$

Пусть  $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$ . Тогда на основании правила деления нечетких чисел LR-типа имеем:

$$\frac{\tilde{6}}{\tilde{2}} = \frac{\{6; 0,2; 0,1\}}{\{2; 0,1; 0,2\}} = \{3; 0,227; 0,053\}.$$

Тогда имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_L}{dx} = 1,9(y_L + 2,773); y_L|_{x=0} = 3,8 \\ \frac{dy_R}{dx} = 2,2(y_R + 3,053); y_R|_{x=0} = 4,1 \end{cases}$$

Откуда

$$\begin{cases} y_L = C_L e^{1,9x} - 2,773 \\ C_L = 6,573 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_R = C_R e^{2,2x} - 3,053 \\ C_R = 7,153 \end{cases}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_L = 6,573 e^{1,9x} - 2,773 \\ y_R = 7,153 e^{2,2x} - 3,053 \end{cases}$$

Для случая задачи Коши для уравнения с четкими коэффициентами и четким начальным условием:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 6; y|_{x=0} = 4$$

$$y = Ce^{2x} - 3; C = 7; y = 7e^{2x} - 3$$

При этом для любого  $\alpha$  - уровня имеем:

$$\begin{aligned}\tilde{y}(\alpha, x) &= \{y_L(\alpha, x); y_R(\alpha, x)\} \\ &= \{[7 - (1 - \alpha)0,427]e^{[2 - (1 - \alpha)0,1]x} \\ &\quad - [3 - (1 - \alpha)0,227]; [7 + (1 - \alpha)0,153]e^{[2 + (1 - \alpha)0,2]x} \\ &\quad - [3 + (1 - \alpha)0,053]\}\end{aligned}$$

Докажем, что для  $\forall \alpha \in [0, 1]$ ,  $y_L(\alpha, x) \leq y_R(\alpha, x)$  имеем:

$$\frac{dy_L(\alpha, x)}{dx} = [7 - (1 - \alpha)0,427][2 - (1 - \alpha)0,1]e^{[2 - (1 - \alpha)0,1]x} > 0$$

$$\frac{dy_R(\alpha, x)}{dx} = [7 + (1 - \alpha)0,153][2 + (1 - \alpha)0,2]e^{[2 + (1 - \alpha)0,2]x} > 0$$

для любых  $x \in (-\infty; \infty)$  и  $\alpha \in [0, 1]$ . Поэтому  $y_L(\alpha, x)$  и  $y_R(\alpha, x)$ , возрастающие функции. Но так как  $\frac{dy_L(\alpha, x)}{dx} < \frac{dy_R(\alpha, x)}{dx}$  и  $y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$  для  $\forall [0, 1]$ , то  $y_L(\alpha, x) < y_R(\alpha, 0)$  на  $[0, 1]$  и лишь  $y_L(1, x) = y_R(1, x)$

# Методы решения НЛДУ

- Составить и решить четкое дифференциальное уравнение с четкими начальными условиями, соответствующее данному нечеткому дифференциальному уравнению.
- Представить нечеткое дифференциальное уравнение и нечеткие начальные условия в интервальной форме и, решив полученную задачу, найти решение поставленной задачи в виде функций (L-R)-типа для любого
- Решить соответствующее четкое дифференциальное уравнение  $\alpha \in [0,1]$  кими начальными условиями. Подставить в найденную четкую функцию (решение четкой задачи) вместо четких коэффициентов заданные соответствующие нечеткие коэффициенты и получить нечеткую функцию, являющуюся решением заданного нечеткого уравнения  $\{a_n\}$  с нечеткими начальными условиями для любых  $\{\tilde{a}_n\}$ . При этом при необходимости полученное нечеткое решение можно представить в интервальной форме.  
 $\alpha \in [0,1]$

Пример 1.2.

$$y'' - \{5; 0,2; 0,3\}y' - \{6; 0,2; 0,1\}y = \{2; 0,2; 0,1\}x - \{3; 0,2; 0,3\}$$

$$\tilde{y}|_{x=0} = \{2; 0,2; 0,1\}, \quad \tilde{y}'|_{x=0} = 0$$

1) Решим четкую задачу Коши.

$$y'' - 5y' - 6y = 2x - 3; \quad y|_{x=0} = 2, \quad y'|_{x=0} = 0$$

$$k^2 - 5k - 6 = 0; \quad k_1 = 6, \quad k_2 = -1$$

$$\bar{y} = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}; \quad y^* = Ax + B$$

Проведя элементарные подсчеты и учитывая начальные условия, получаем:

$$y = 0,22e^{6x} + 1,01e^{-x} - 0,33x + 0,77$$

2) Представим нечеткую задачу Коши в интервальной форме и найдем её решение

$$\begin{cases} y'' - 5,2y' - 6,2y = 1,8x - 3,3; & y|_{x=0} = 2,1, & y'|_{x=0} = 0 \\ y'' - 4,7y' - 5,9y = 2,1x - 2,8; & y|_{x=0} = 1,8, & y'|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} k^2 - 5,2k - 6,2 = 0 \\ k^2 - 4,7k - 5,9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1 = 6,37; & k_2 = -1 \\ k_1 = 5,73; & k_2 = -1,03 \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, находим решение задачи в интервальной форме:

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 0,22e^{6,2x} + 1,1e^{-x} - 0,29x + 0,775 \\ y_L = 0,21e^{5,73x} + 0,83e^{-1,03x} - 0,356x + 0,758 \end{cases}$$

Пример 1.3.

$$y^{II} - 5y^I - 6y = 2x - 3; \quad y|_{x=0} = 2, \quad y^I|_{x=0} = 0$$

$$y = 0,22e^{6x} + 1,01e^{-x} - 0,33x + 0,77$$

Учитывая правило действий над нечеткими числами, имеем:

$$\tilde{7} = \tilde{6} + \tilde{1} = \{7; 0,5; 0,4\}$$

$$\tilde{9} = \tilde{3} \cdot \tilde{3} = \{9; 1,71; 1,71\}$$

$$\widetilde{0,77} = \tilde{7} : \tilde{9} = \{0,77; 0,234\}$$

$$\widetilde{0,22} = (\widetilde{0,77} - \widetilde{0,33}) : 2 = \{0,22; 1,004; 0,972\}$$

Следовательно,

$$\tilde{y} = \begin{cases} y_R = 1,192e^{6,2x} + 1,84e^{-0,98x} - 0,324x + 7,4 \\ y_L = 0,76e^{5,9x} + 0,68e^{-1,03x} - 0,339x + 6,4 \end{cases}$$

# Система нечетких дифференциальных уравнений (СНДУ) первого порядка

Определение 2.1: Систему дифференциальных, содержащих хотя бы одно нечеткое дифференциальное уравнение, будем называть нечеткой системой дифференциальных уравнений и обозначим:

$$\frac{dy_i}{dx} = \tilde{f}_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n), (i = \overline{1, n})$$

Для случая нечетких линейных дифференциальных уравнений первого порядка имеем:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} y_j + \tilde{f}_1(x) \\ \frac{dy_2}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} y_j + \tilde{f}_2(x) \\ ..... \\ \frac{dy_n}{dx} = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_{ij} y_j + \tilde{f}_n(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

Следует отметить, что  $\tilde{f}_i(x)$  могут быть и четкими и нечеткими функциями.

# Порядок решения СНДУ первого порядка:

---

- Привести заданную систему нечетких уравнений к системе интервальных уравнений;
- В зависимости от типа полученных систем четких дифференциальных уравнений применяем тот или иной способ решения системы дифференциальных уравнений.

Пример 2.1.

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = \tilde{2}x + y, & X|_{t=0} = \tilde{4} \\ \frac{dy}{dt} = \tilde{3}x + \tilde{4}y, & y|_{t=0} = \tilde{1} \end{cases}$$

где  $\tilde{1} = \{1; 0,2; 0,3\}$ ;  $\tilde{2} = \{2; 0,2; 0,1\}$ ;  $\tilde{3} = \{3; 0,1; 0,3\}$ ;  $\tilde{4} = \{4; 0,2; 0,3\}$ .

Пусть  $\tilde{X} = \{X_L; X_R\}$ ,  $\tilde{y} = \{y_L; y_R\}$

Выпишем нечеткую задачу Коши в интервальной форме и решим её. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{dX_R}{dt} = 2,1X_R + 1,3y_R, & X_R|_{t=0} = 4,3 \\ \frac{dy_R}{dt} = 3,3X_R + 4,3y_R, & y_R|_{t=0} = 1,3 \end{cases}$$

$$y_R = \frac{1}{1,3}(X_R^I - 2,1X_R)$$

$$X_R^{II} - 6,4X_R^I + 5,6X_R = 0$$

$$\begin{cases} X_R = C_{R_1} e^{5,46t} + C_{R_2} e^{1,05t} \\ y_R = 3,26C_{R_1} e^{5,46t} - 1,02C_{R_2} e^{1,05t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_R = 1,33e^{5,46t} + 2,97e^{1,05t} \\ y_R = 4,34e^{5,46t} - 3,04e^{1,05t} \end{cases}$$

Аналогично,

$$\begin{cases} \frac{dX_L}{dt} = 1,8X_L + 0,8y_L, & X_L|_{t=0} = 3,8 \\ \frac{dy_L}{dt} = 2,9X_L + 3,8y_L, & y_L|_{t=0} = 0,8 \end{cases}$$
$$\begin{cases} X_L = C_{L_1}e^{4,62t} + C_{L_2}e^{0,98t} \\ y_L = 3,53C_{L_1}e^{4,62t} - 1,1C_{L_2}e^{0,98t} \end{cases}$$

Учитывая начальные условия, имеем:

$$\begin{cases} X_L = 1,08e^{4,62t} + 2,7e^{0,98t} \\ y_L = 3,64e^{4,62t} - 2,8e^{0,98t} \end{cases}$$

Таким образом, решение нечеткой задачи Коши в интервальной форме будет:

$$\begin{cases} \tilde{X} = \{1,08e^{4,62t} + 2,7e^{0,98t}; 1,33e^{5,46t} + 2,97e^{1,05t}\} \\ \tilde{y} = \{3,64e^{4,62t} - 2,8e^{0,98t}; 4,34e^{5,46t} - 3,04e^{1,05t}\} \end{cases}$$

Для сведения решения нечеткой задачи Коши у виду

$$\{\tilde{X}; \tilde{y}\} = \left\{ \{X; m_{X_L}; m_{X_R}\}, \{y; m_{y_L}; m_{y_R}\} \right\}$$

Следует выписать четкую задачу Коши. Имеем:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, & X|_{t=0} = 4 \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y, & y|_{t=0} = 1 \end{cases}$$

Откуда:

$$\begin{cases} x = 1,25e^{5t} + 2,75e^t \\ y = 3,75e^{5t} - 2,75e^t \end{cases}$$

Сравнивая полученные результаты, убеждаемся, что

$$X(t) \in \tilde{X}(t) \text{ и } y(t) \in \tilde{y}(t)$$

Учитывая свойство выпуклости нечетких величин, для любого  $\alpha \in [0,1]$  имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\alpha, t) &= \begin{Bmatrix} X_L(\alpha, t) \\ X_R(\alpha, t) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} [1,25 - (1 - \alpha)0,17]e^{[5-(1-\alpha)0,38]t} + [2,75 - (1 - \alpha)0,03]e^{[1-(1-\alpha)0,02]t} \\ [1,25 + (1 - \alpha)0,08]e^{[5+(1-\alpha)0,46]t} + [2,75 + (1 - \alpha)0,22]e^{[1+(1-\alpha)0,02]t} \end{Bmatrix} \\ \tilde{y}(\alpha, t) &= \begin{Bmatrix} y_L(\alpha, t) \\ y_R(\alpha, t) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} [3,75 - (1 - \alpha)0,22]e^{[5-(1-\alpha)0,38]t} - [2,75 - (1 - \alpha)0,02]e^{[1-(1-\alpha)0,02]t} \\ [3,75 + (1 - \alpha)0,59]e^{[5+(1-\alpha)0,46]t} - [2,75 + (1 - \alpha)0,29]e^{[1+(1-\alpha)0,05]t} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

**Спасибо за  
внимание**

---