

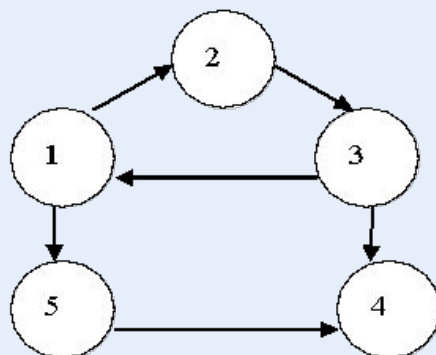
Модели конфликтов

**Модели конфликтов с применением
теории графов**

Структура- совокупность связей между элементами системы

Определение. Пусть X - конечное множество,
 $(X, X) = \{(i, j) : i, j \in X, i \neq j\}$

Определение. **Ориентированным графом** называется пара $G = (X, U)$, $U \subset X \times X$, X - непустое множество, X – множество вершин, U - дуги



Определение. **Неориентированным графом** называется пара $G = (V, E)$,
где

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ конечное множество вершин,

$E = \{(v_i, v_j)\}$ множество ребер

Путь — это последовательность вершин $v_1, v_2, \dots, v_n$, для которой существуют дуги $v_1 \rightarrow v_2, v_2 \rightarrow v_3, \dots, v_{n-1} \rightarrow v_n$. Говорят, что этот путь начинается в вершине v_1 , проходит через вершины $v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$, и заканчивается в вершине v_n .

Путь называется:

- простым, если ни одна вершина не встречается более одного раза
- замкнутым, если $v_{t+1} = v_1$
- полным, если содержит все вершины из V

Контур- простой замкнутый путь в орграфе.

Вершина v достижима из вершины u , если существует путь из u в v ($u \rightarrow v$).

Утверждение. Если $u \rightarrow v$, то существует простой путь из u в v .

Расстояние между u и v - длина кратчайшего пути ($\rho(u,v)$)

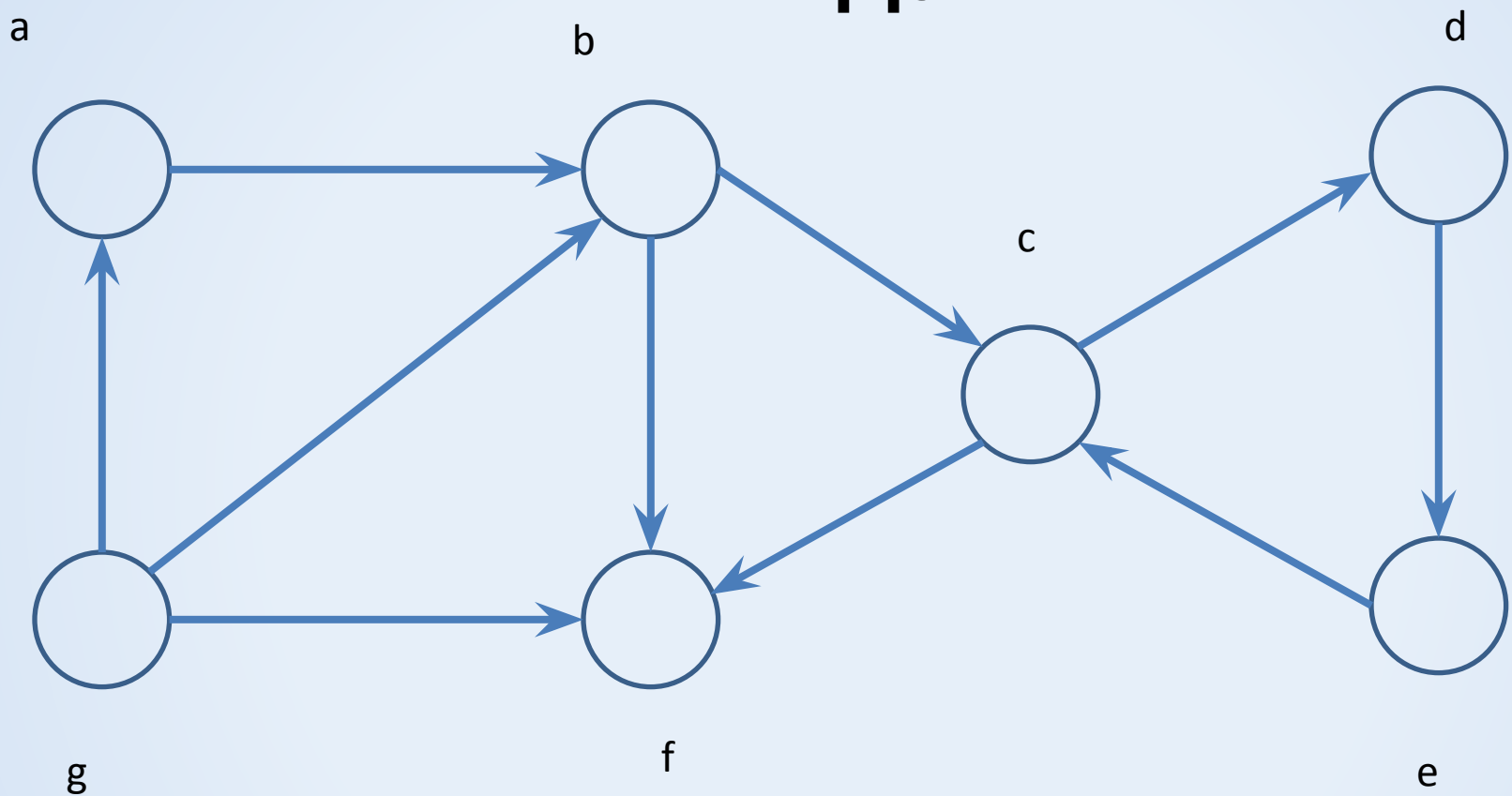
Вершины соединимы, если существует полупуть из u в v ($u \rightarrow v$).

Полупуть в орграфе $G=(V,A)$ – последовательность вершин и дуг

$v_1, a_1, v_2, a_2, \dots, v_t, a_t, v_{t+1}$

$a_i = (v_i, v_{i+1})$ или (v_{i+1}, v_i)

Примеры путей различного вида



Цепью в графе $G=(V,E)$ называется последовательность вершин и ребер $v_1, (v_1, v_2), v_2, (v_2, v_3), \dots, (v_t, v_{t+1}), v_{t+1}$

Простая замкнутая цепь называется циклом

Граф называется связным, если для любых двух его вершин существует путь, их соединяющий; в противном случае граф называется несвязным.

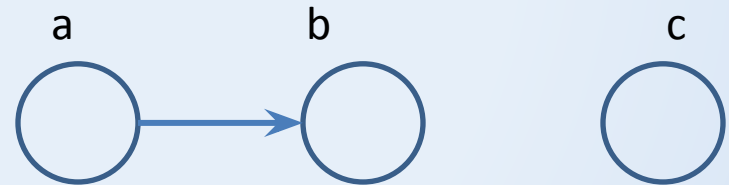
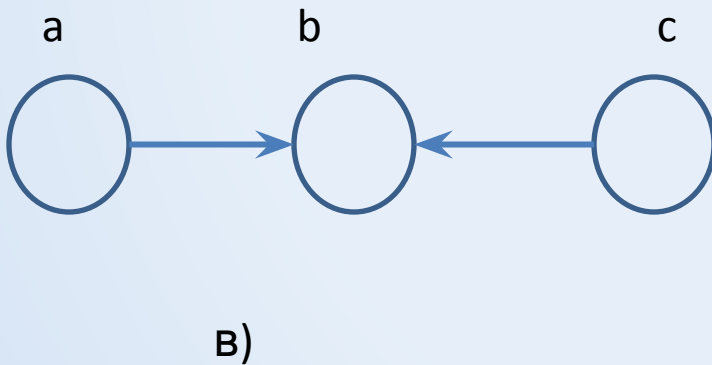
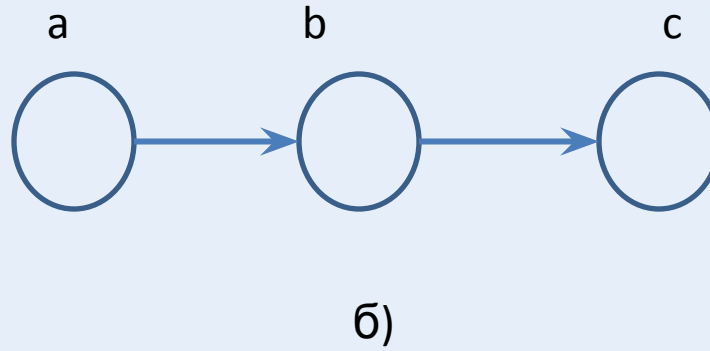
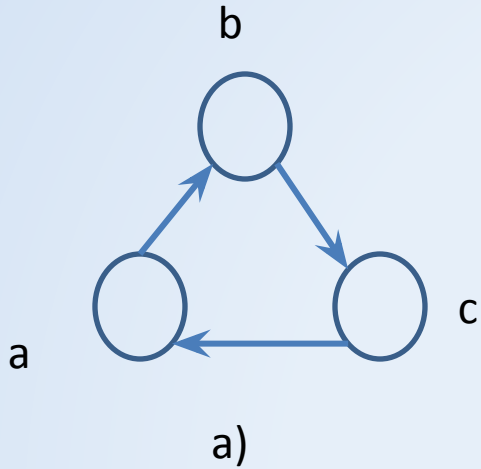
Дерево представляет собой связный граф без циклов, имеющий исходную вершину (корень) и крайние вершины; пути от исходной вершины к крайним вершинам называются ветвями.

Утверждение. Орграф сильно связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный замкнутый путь.

Утверждение. Орграф односторонне связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный путь.

Утверждение. Орграф слабо связан тогда и только тогда, когда в нем имеется полный полупуть.

Категории связности графов



Матрица смежности орграфа $G=(V,A)$ – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, (v_i, v_j) \in A \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Матрица достижимости R орграфа $G=(V,A)$ – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, v_i \rightarrow v_j \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

Матрица расстояний RO орграфа $G=(V,A)$ – матрица, элементы которой определяются следующим образом:

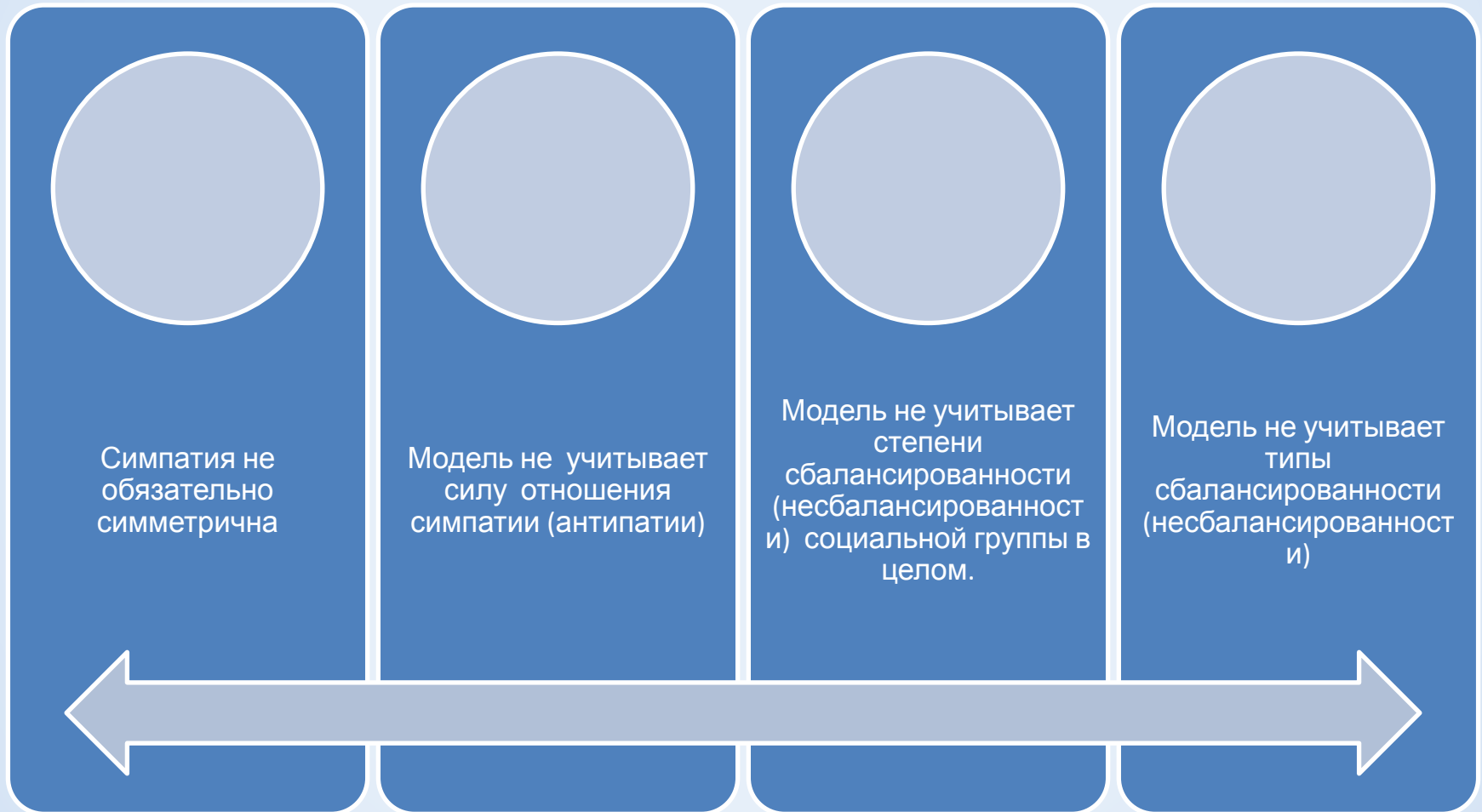
$$\rho_{ij} = \rho_{ij}(v_i, v_j)$$

Модели структурного баланса

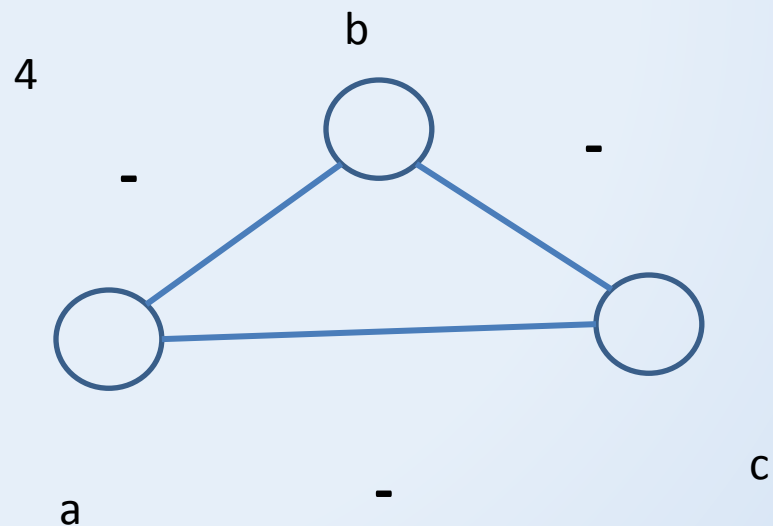
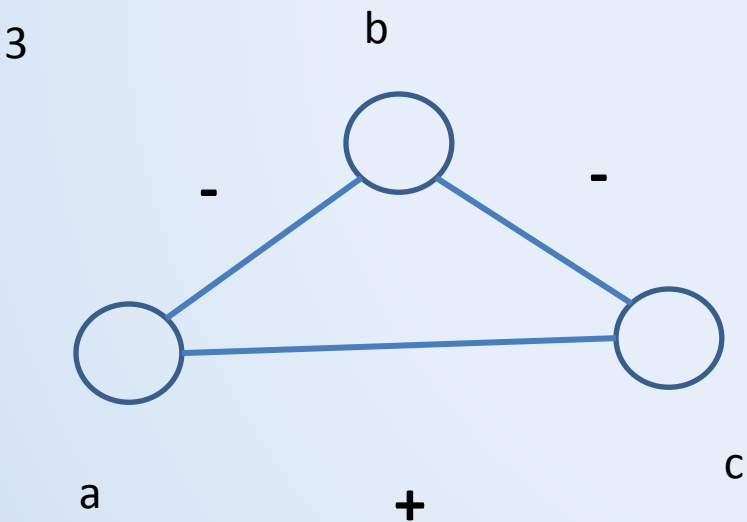
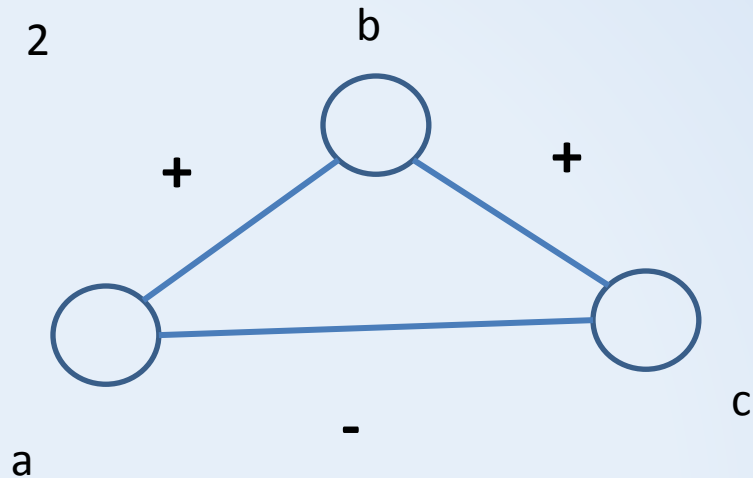
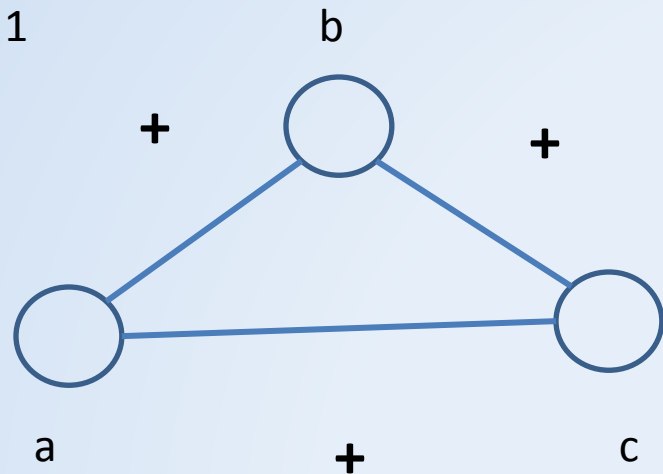


Неориентированный граф $G=(V,E)$
Знак цепи в графе- произведение знаков ребер образующих цепь.
Модель структурного баланса – знаковый граф $G=(V,E)$.
Положительный знак ребра (a,b) – симпатия между членами группы a и b
Отрицательный знак ребра (a,b) – антипатия между членами группы a и b

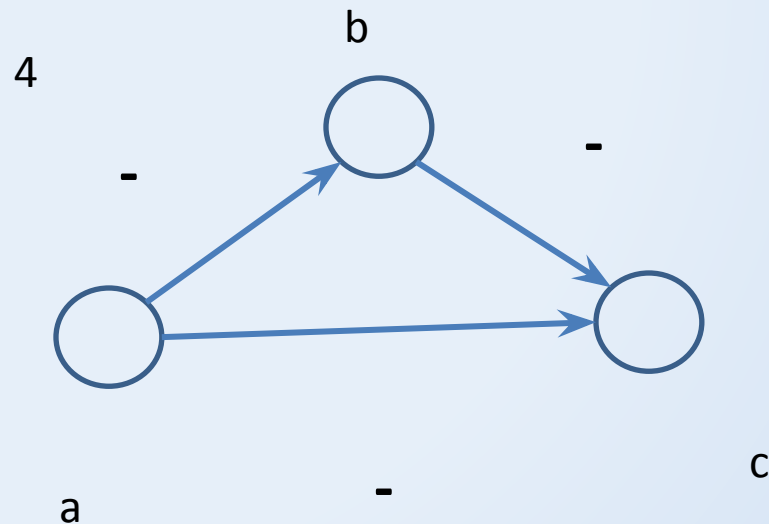
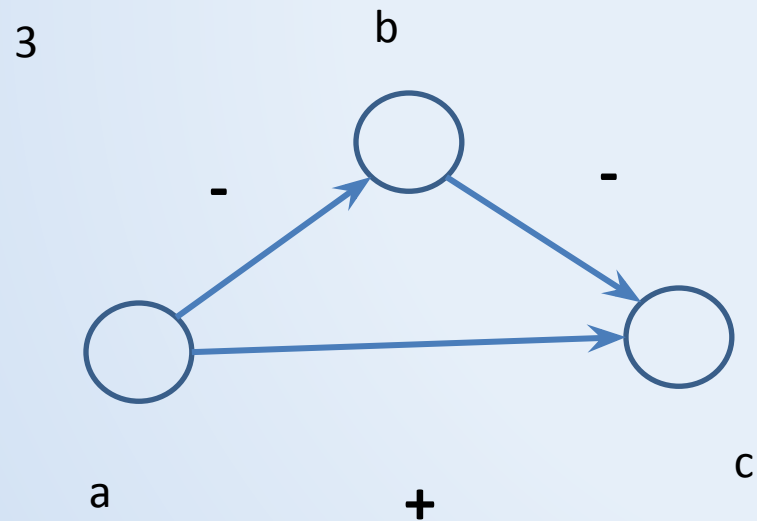
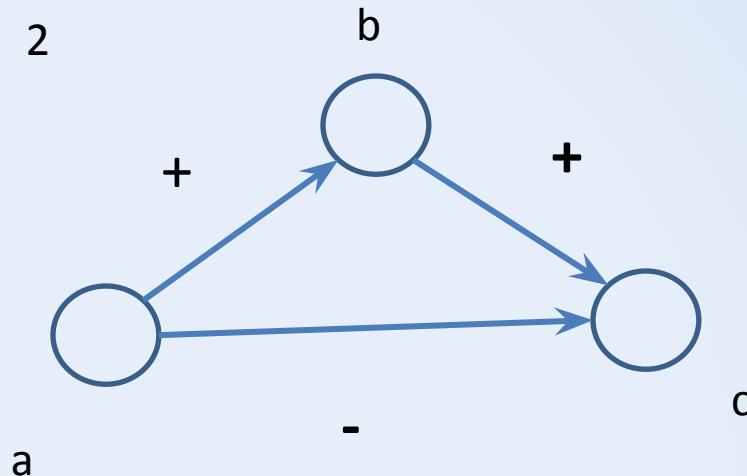
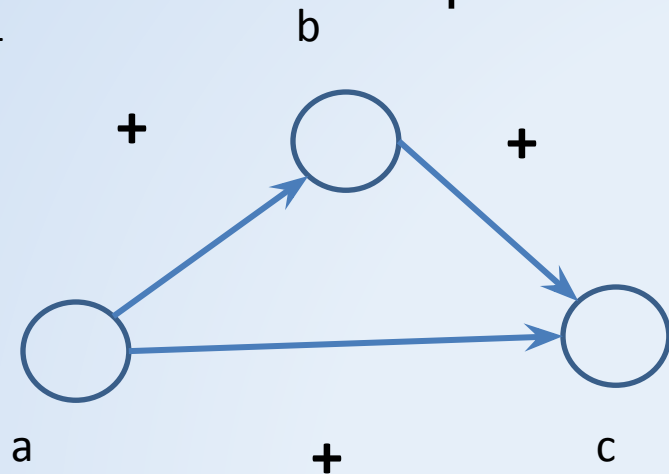
Ограничения базовой модели:



Типы отношений в группах из трех человек



Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)



Граф G сбалансирован, если он не содержит отрицательных циклов.

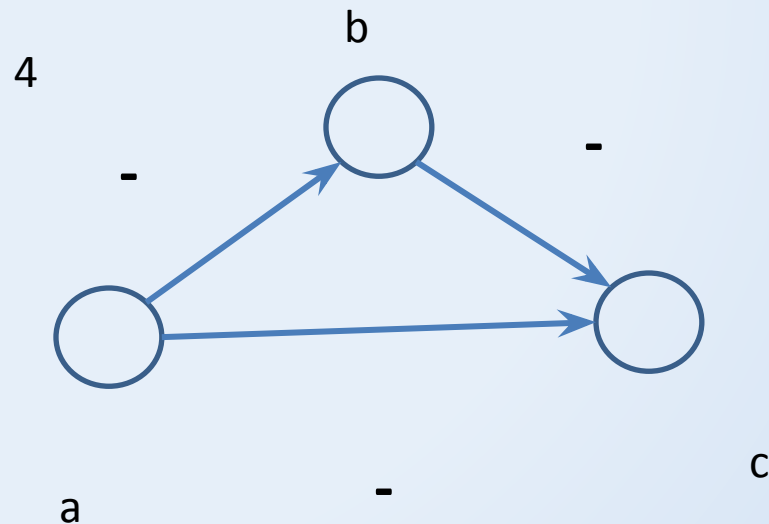
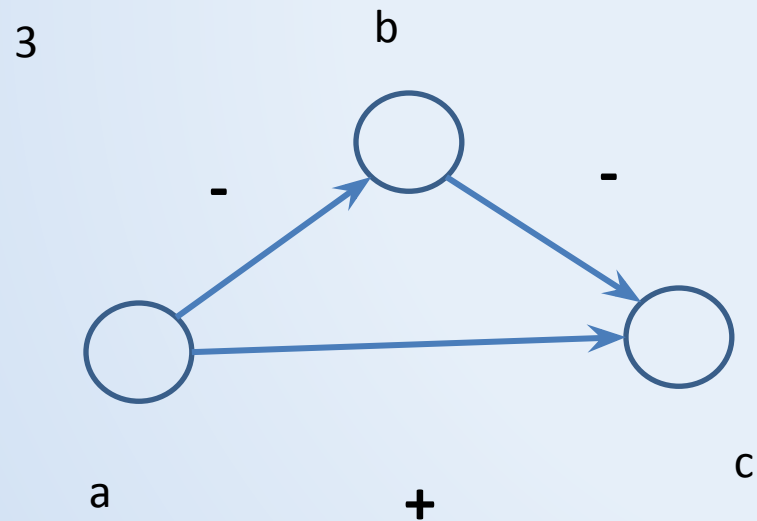
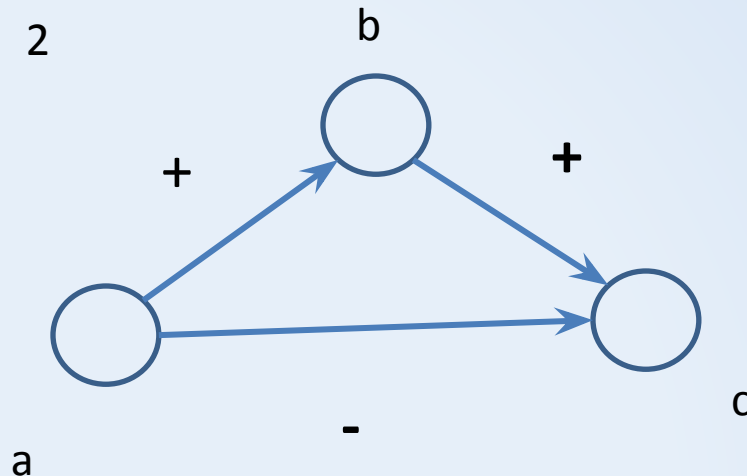
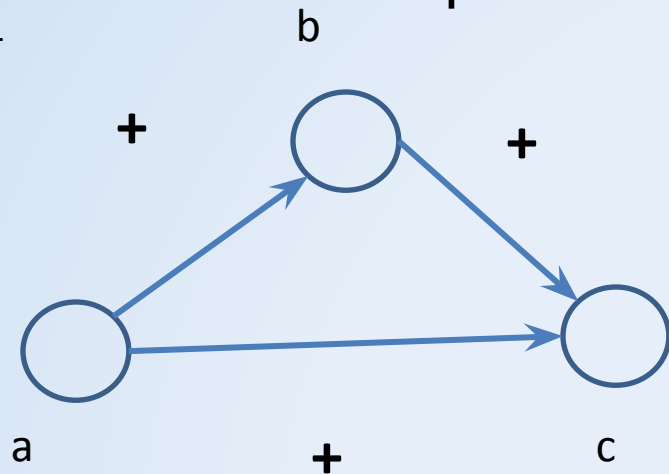
Теорема (Харари).

Для знакового графа $G=(V,A)$ следующие утверждения эквивалентны:

- граф G сбалансирован;
- Любые две цепи между вершинами u и v имеют одинаковый знак;
- множество V можно разбить на 2 непересекающихся множества A и B так, что каждое «+» ребро соединяет вершины из одного множества и каждое «-» ребро соединяет вершины из различных множеств.

Граф G сбалансирован, если он не
содержит отрицательных
полуконтуров

Устойчивые конфигурации в модели направленных отношений из трех человек (монография В.А. Светлова 2001)

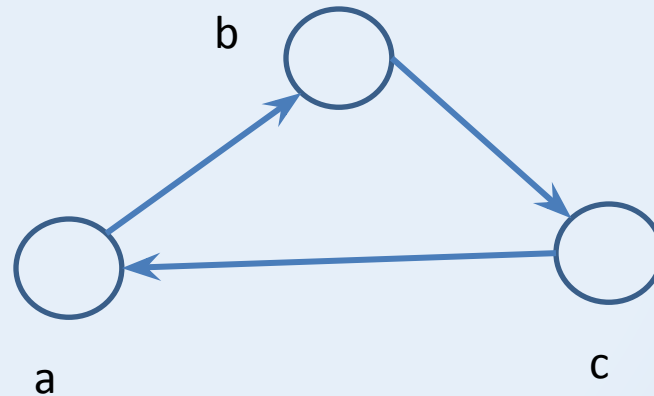
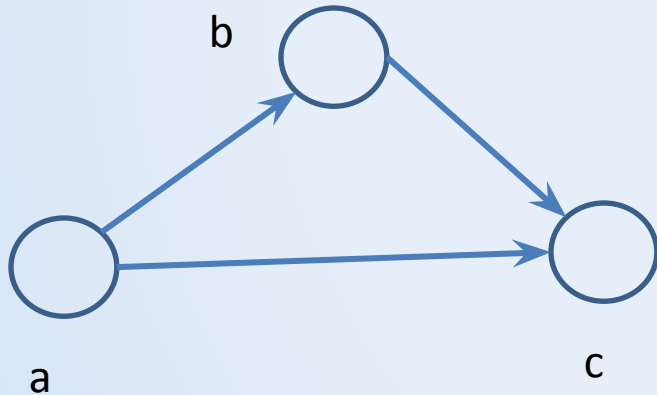


Конфликты альтернатив

Орграф $T=(V,A)$ называется турнирным, если для любой пары вершин $u,v \in V$ существует ровно одна дуга $(u,v) \in A$ либо $(v,u) \in A$

Победитель турнира:

$$s(u^*) = \max_{u \in V} s(u)$$



Утверждение. В турнире существует полный простой путь.

$s(u)$ – число выходных дуг для вершины u

Статусные конфликты

Математическая модель – связный бесконтурный орграф

$$D=(V,A)$$

Дуга (u,v)

Путь от u до v

Длина кратчайшего пути от u до v – уровень v относительно u

$$t_D: V \rightarrow Z_+$$

1°. Если вершина u не имеет выходных дуг, то $t_D(u)=0$.

2°. D', D, u , то $t_{D'}(u) > t_D(u)$

3°. D, D, u , $\sum_k n_k(u) > t_D(u)$

$$n_k(u)$$

Теорема (Кемени-Снелл). Мера статуса $h_D(u)$ обладает следующими свойствами:

- 1) Удовлетворяет 1°- 3°
- 2) Если t_D - некоторая мера статуса, принимающая неотрицательные численные значения и удовлетворяющая 1°- 3°, то для любой u - $t_D(u) > h_D(u)$

Если $u \rightarrow v$, то уровень v относительно u - длина максимального пути от u до v

$$V = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_m, L_p \cap L_q = \emptyset$$

Упорядоченные разбиения-расслоения

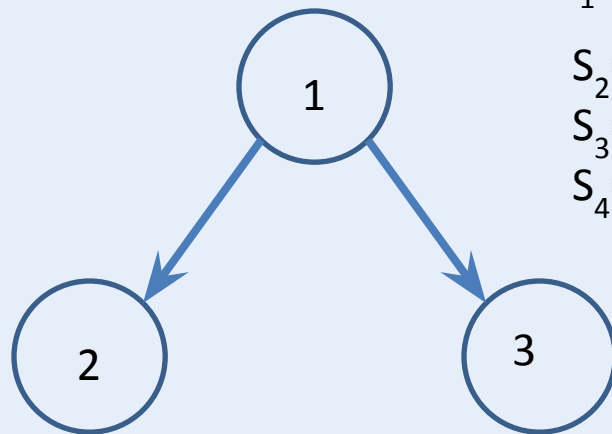
Мера статуса сотрудника u в организации D :

$$G_D^S(u) = \sum_{k=1}^m (k - p) b_k(u)$$

u - принадлежит слою L_p в расслоении S

$b_k(u)$ – число вершин в слое L_k , достижимых из u

m – число слоев в расслоении S



$$S_1 = L_1 \cup L_2, L_1 = \{1\}, L_2 = \{2, 3\}$$

$$S_2 = L_1 \cup L_2, L_1 = \{1, 2\}, L_2 = \{3\}$$

$$S_3 = L_1, L_1 = \{1, 2, 3\}$$

$$S_4 = L_1 \cup L_2, L_1 = \{2\}, L_2 = \{1, 3\}$$

$$S_5 = L_1 \cup L_2 \cup L_3$$

S	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$G^S(u)$	2	1	0	-1	-3

Когнитивные карты конфликтных процессов

Элементы системы. Обозначаются вершинами орграфа

Значимые связи обозначают дугами. (u,v) – элемент u непосредственно влияет на элемент v .

Элементам могут приписываться числовые значения.

Дуга (u,v) : «+» или «-»

Обратные связи - контуры

Два типа контуров: положительные (положительная обратная связь) и отрицательные (отрицательная обратная связь)

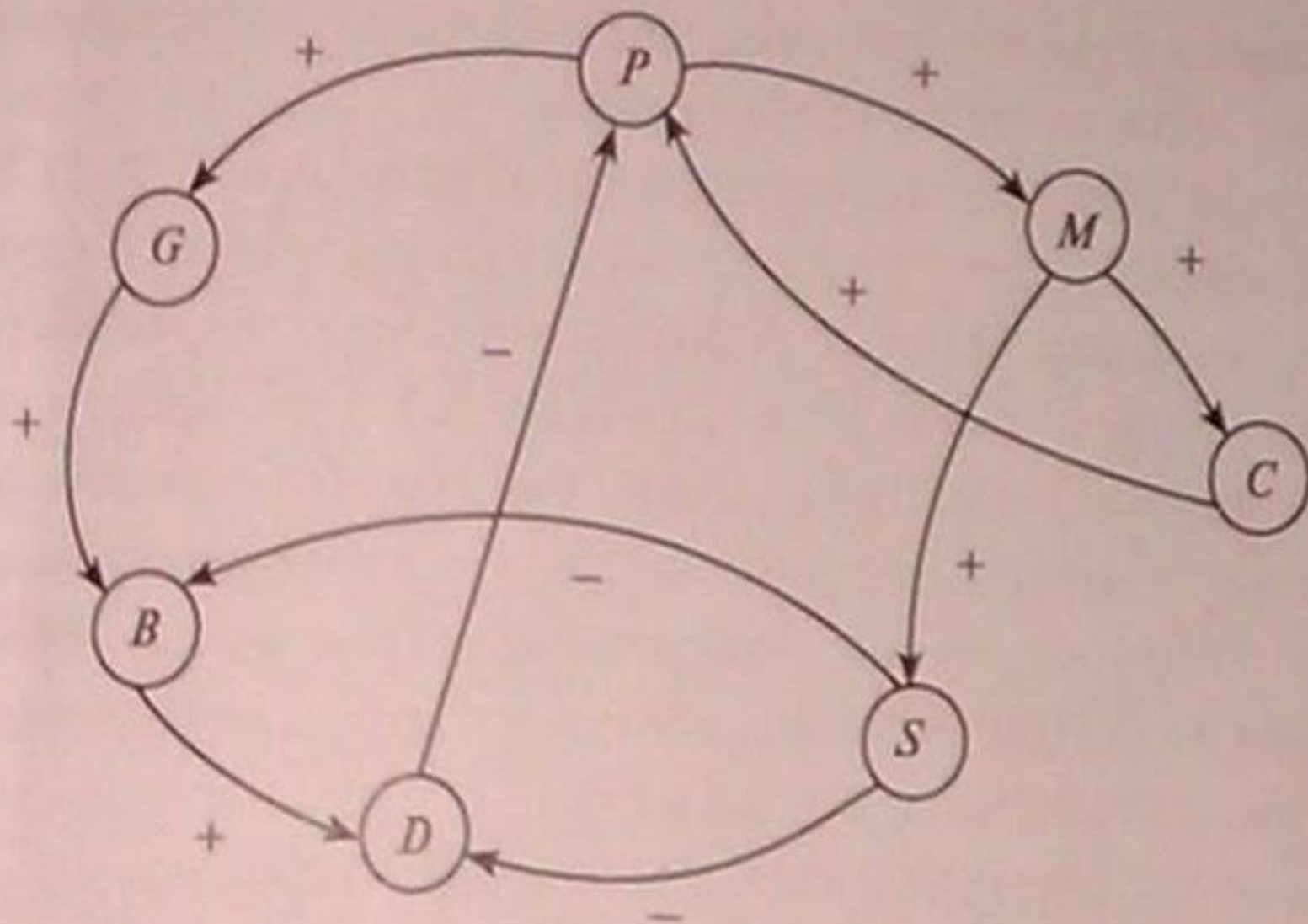
Контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он положителен.

$$R = \sum_{i=1}^m R_i$$

	Система бесконфликтна	Система конфликтна
Система устойчива	$-1 < R < 0$	$0 \leq R \leq 1$
Система неустойчива	$\infty < R \leq -1$	$1 \leq R \leq \infty$

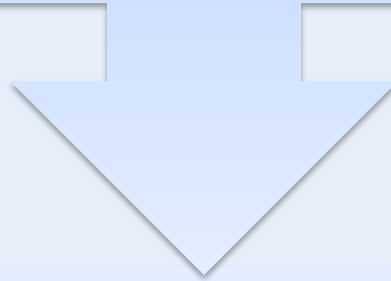
Пример

- P - численность городского населения
- G -количество мусора на единицу площади
- B – бактериологическая зараженность на единицу площади
- D –число заболеваний
- S – число очистных сооружений
- C –миграция в город
- M –улучшение условий жизни в городе



Сетевое планирование и управление

Сетевое планирование и управление (СПУ) – это комплекс графических и расчетных методов, организационных мероприятий, обеспечивающих моделирование, анализ и динамическую перестройку плана выполнения сложных проектов и разработок



Объект управления - коллективы исполнителей, располагающие определенными ресурсами и выполняющие комплекс операций, который призван обеспечить достижение намеченной цели, например разработку новой услуги – исследование системы управления, реализацию комплекса управленческих процедур и операций для достижения стратегической организации и др.

Комплекс работ (комплекс операций, или проект) - любая достаточно сложная задача, решение которой требует выполнения большого количества разнообразных работ

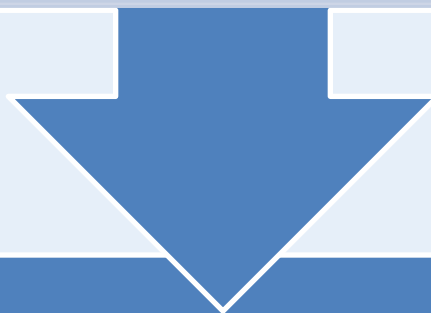
Сетевая модель - это план выполнения некоторого комплекса работ, заданный в специфической форме сети (дугам поставлены в соответствие интервалы времени), графическое изображение которой называют *сетевым графиком*.

Работа

действительная работа -
протяженный во времени
процесс, требующий затрат
ресурсов

ожидание - протяженный во
времени процесс, не
требующий затрат труда

зависимость, или
фиктивная работа, -
логическая связь между
двумя или несколькими
работами, не требующими
затрат труда, материальных
ресурсов или времени.

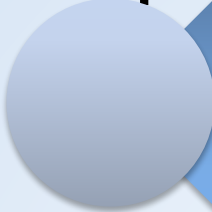


Событие

момент завершения какого-либо
процесса, отражающий
отдельный этап выполнения
проекта

может быть частным результатом
отдельной работы или суммарным
результатом выполнения
нескольких работ

Общие черты и особенности проектов



Проект определяется множеством работ.
Проект завершен, если все работы
выполнены



Для каждой работы указано подмножество
работ, которые обязательно должны
выполняться



Для каждой работы в простейшем случае
точно указано время ее выполнения



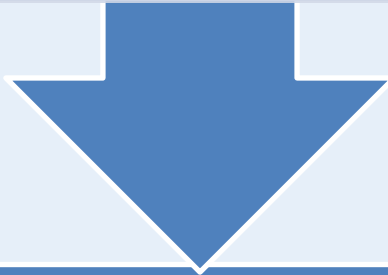
Начатая работа продолжается без перерыва
до завершения. Последующая работа не
может начинаться, пока не завершена
предыдущая работа



Цели – выполнить проект в кратчайшие
сроки, не превышающие заданную величину
с минимальными затратами каких-то
ресурсов

Путь

любая последовательность работ, в которой конечное событие каждой работы совпадает с начальным событием следующей работы



Критический путь

наиболее продолжительный путь в сетевом графике

работы этого пути определяют общую продолжительность работы над проектом

Метод критического пути

1. Список работ, входящих в проект: $S = \{s_1, \dots, s_n\}$

Продолжительность выполнения: $t(s_i)$.

2. Список предшествующих работ $\Gamma^{-1}(s_i)$

Определение. Наиболее ранним возможным сроком наступления j -го события является наиболее ранний возможный срок завершения всех работ, подходящих к j -му узлу

λ_j^p -наиболее ранний возможный срок наступления, t_{ij} - продолжительность работы, $\lambda_0^p = 0$

$$\lambda_j^p = \max_{i \in \Gamma_j^{-1}} \{ \lambda_i^p + t_{ij} \}, j = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

$$T_{\text{кр}} = \lambda_n^p$$

Резерв времени и критический путь

Определение. Наиболее поздним допустимым сроком наступления i -го события является наиболее поздний срок завершения всех работ, идущих к i -му узлу, не влияющий на время завершения всего проекта за $T_{кр}$, $T_{кр} = \lambda_n^п$.
Начинаем с события n до 0:

$$\lambda_i^п = \min_{j \in \Gamma_i} \{ \lambda_j^п - t_{ij} \} \quad (2)$$

$j^*(i)$ - номер, при котором достигается минимум.

Определение. Полный резерв времени $r_{ij}^п$ для работы (i,j) есть максимальная продолжительность задержки работы, не вызывающая задержки в осуществлении всего проекта.

$$r_{ij}^п = \lambda_j^п - \lambda_i^п - t_{ij}$$

Определение. Свободный резерв времени r_{ij}^c для работы (i,j) является показателем максимальной задержки работы (i,j), не влияющий на начало последующих работ

$$r_{ij}^c = \lambda_j^p - \lambda_i^p - t_{ij}$$

Определение. Независимый резерв времени r_{ij}^n для работы (i,j) представляет собой максимальную продолжительность задержки работы (i,j) без задержки последующих работ, если все предшествующие работы заканчиваются как можно позже.

$$r_{ij}^n = \max \{0, \lambda_j^p - \lambda_i^n - t_{ij}\}$$

Утверждение 1. Полный резерв работ, лежащих на критическом пути равен нулю.

Утверждение 2. Увеличение продолжительности не критических работ за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в который войдет эта работа.

Резервы связаны соотношением:

$$r_{ij}^n \leq r_{ij}^c \leq r_{ij}^p$$

Поиск нового критического пути

Работа (k,l)

- Узел с номером k принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером j ($j \leq k$) принадлежит критическому пути, то номер предшествующего узла равен $i(j)$ (формула (1))
- Начальный узел всегда имеет номер 0
- Узел с номером l принадлежит новому критическому пути
- Если узел с номером j ($j \geq l$) принадлежит критическому пути, то номер следующего за ним узла равен $i^*(j)$ (формула (2))
- Конечный узел всегда имеет номер n

Оптимизация плана комплекса работ

Продолжительность работы (i,j) y_{ij} принадлежит $[L_{ij}, U_{ij}]$

Затраты на выполнение работы $b_{ij} - a_{ij}y_{ij}, a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0$

Желаемая продолжительность исполнения проекта T_0

t_i - неизвестный момент наступления события i

Математическая модель:

$$\sum_{(i,j) \in S} a_{ij}y_{ij} \rightarrow \max_{t_i, y_{ij}}$$

$$t_i - t_j + y_{ij} \leq 0, \quad (i, j) \in S$$

$$-t_0 + t_n \leq T_0,$$

$$L_{ij} \leq y_{ij} \leq U_{ij}, \quad (i, j) \in S$$

Правила построения

В сетевой модели не должно быть «тупиковых» событий, т.е. событий, из которых не выходит ни одна работа, за исключением завершающего события.

В сетевом графике не должно быть «хвостовых» событий, т.е. событий, которым не предшествует хотя бы одна работа, за исключением исходного.

В сети не должно быть контуров и петель, т.е. путей, соединяющих некоторые события с ними же самими.

Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой (стрелкой). Чтобы выполнить это требование, в некоторых случаях приходится вводить *фиктивное событие и фиктивную работу, изображаемую на графике пунктирной линией.*

В сети рекомендуется иметь одно исходное и одно завершающее событие.

Сетевой график должен быть упорядочен