

Множества. Натуральные числа

Козлов Александр Иванович

Понятие множества

Множество — это совокупность объектов, называемых элементами множества.

$$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

$$B = \{\text{пирамида Хеопса, висячие сады Семирамиды, статуя Зевса в Олимпии, храм Артемиды в Эфесе, мавзолей в Галикарнасе, колосс Родосский, Александрийский маяк}\}$$

Понятие принадлежности

В общем случае запись

$$a \in S$$

означает, что объект a — элемент множества S .

Часто говорят, что a **принадлежит множеству** S .

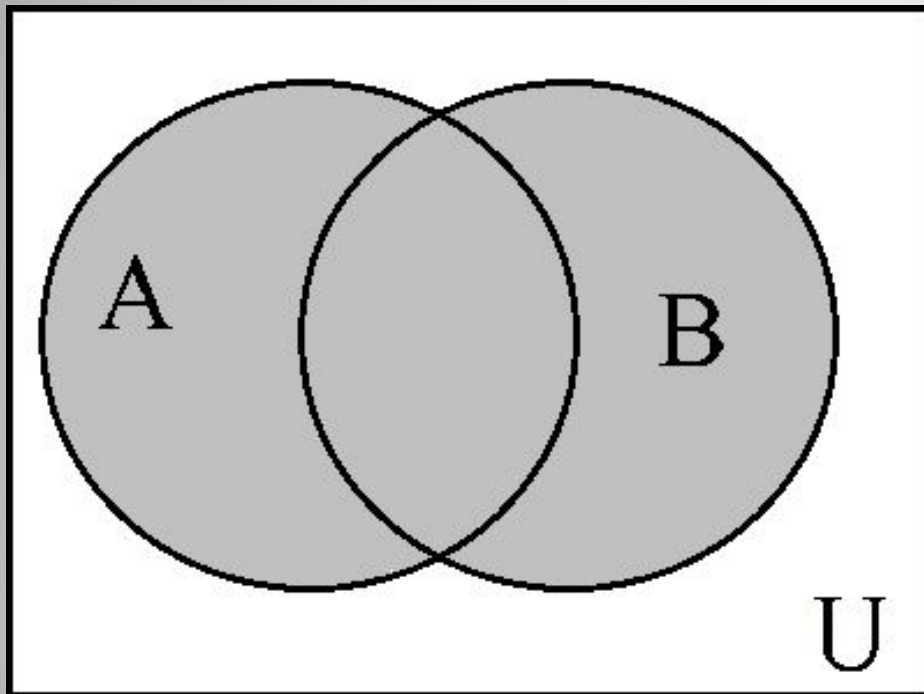
Если объект a **не принадлежит** S , то пишут:

$$a \notin S$$

$$13 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$$

Йошкин кот $\notin$ Семь чудес света

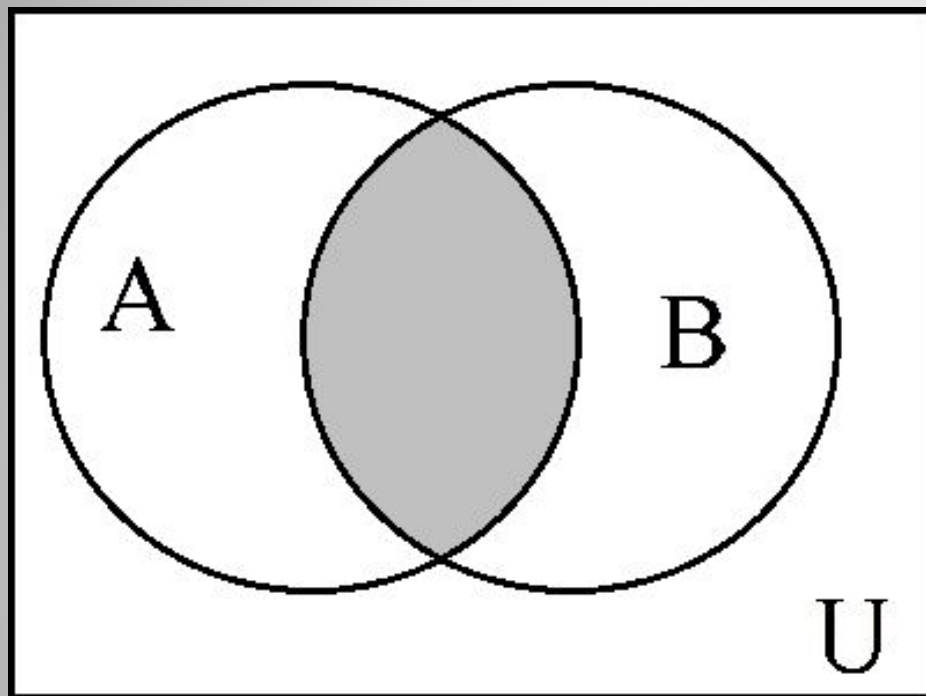
Операции над множествами



$$A \cup B$$

Объединение множеств

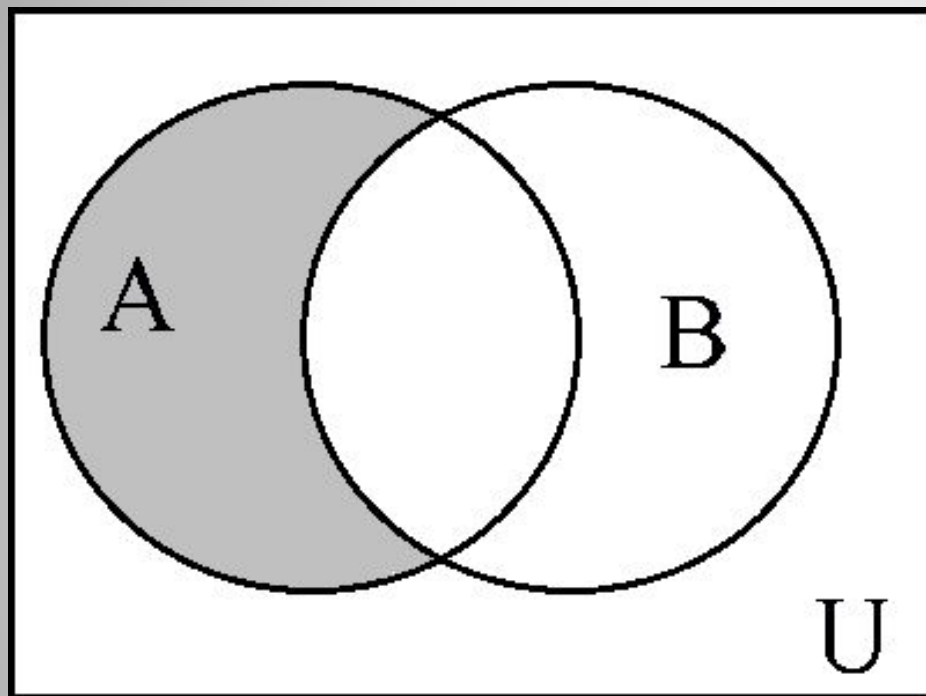
Операции над множествами



$$A \cap B = AB$$

Пересечение множеств

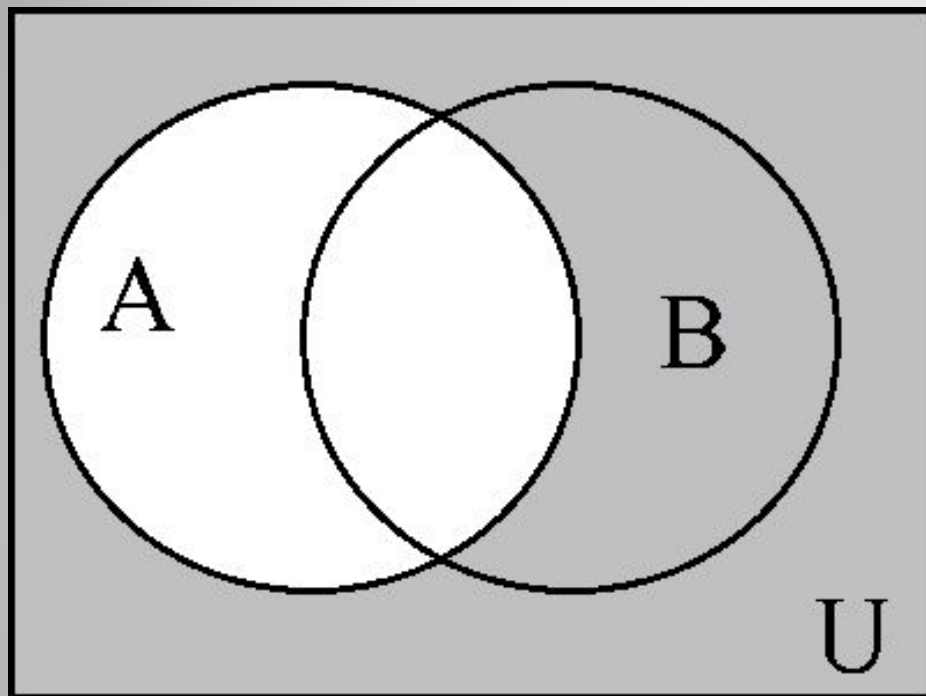
Операции над множествами



$$A \setminus B$$

Разность множеств

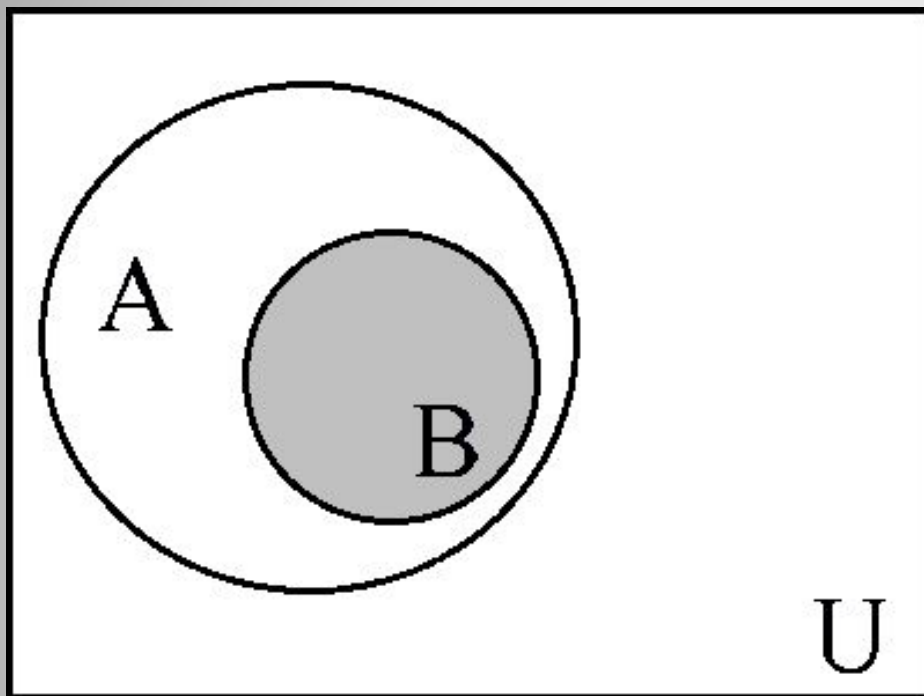
Операции над множествами



$$A' = U \setminus A$$

Дополнение множества

Подмножество



$$A \subset B$$

Мощность множества

Мощностью конечного множества S называется число его элементов. Она обозначается символом

$$|S|$$

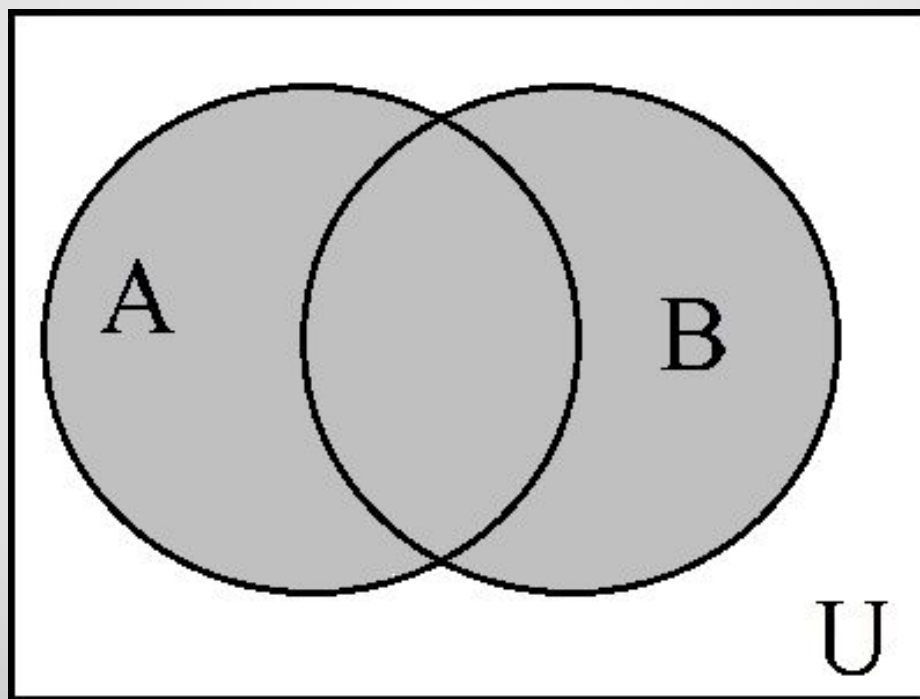
$$|\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}| = 8$$

$$|\text{Семь чудес света}| = 7$$

$$|\emptyset| = 0$$

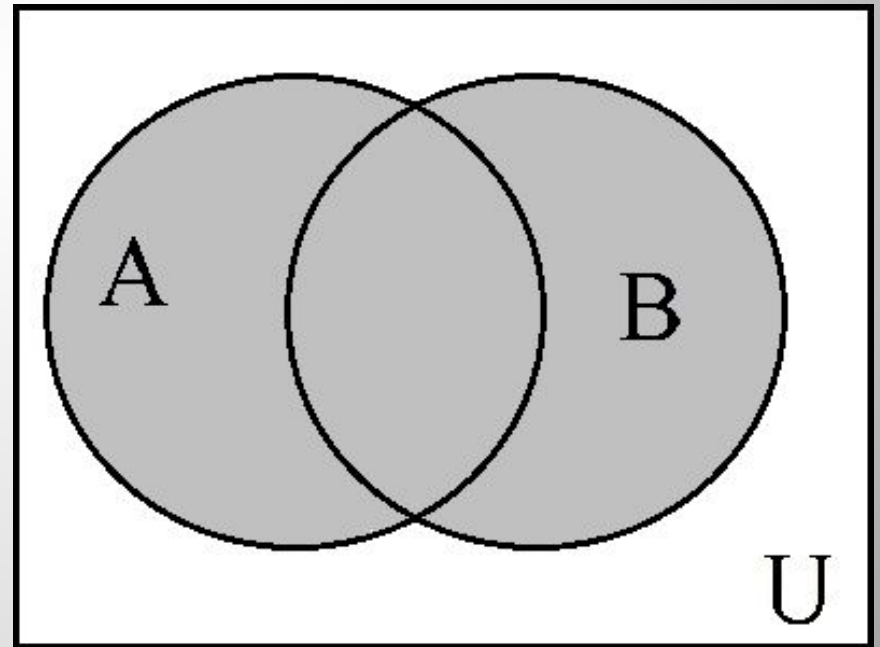
Формула включений и исключений

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



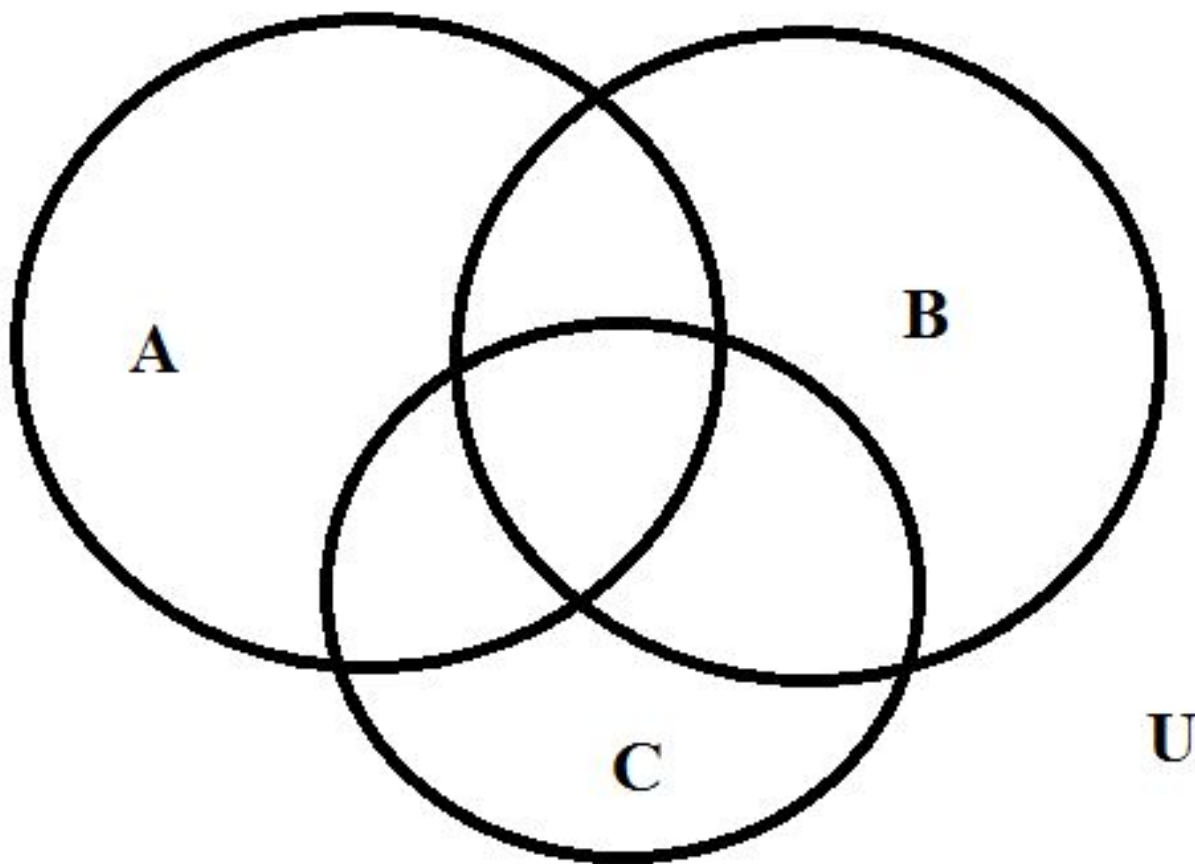
Задача 1

Каждый из 43 студентов первого курса, изучающих информатику в университете, может посещать и дополнительные лекции. Если 16 из них слушают еще курс альпинизма, 17 — курс парашютного спорта, и 5 изучают обе эти дисциплины, то сколько студентов вообще не посещают упомянутых дополнительных занятий?

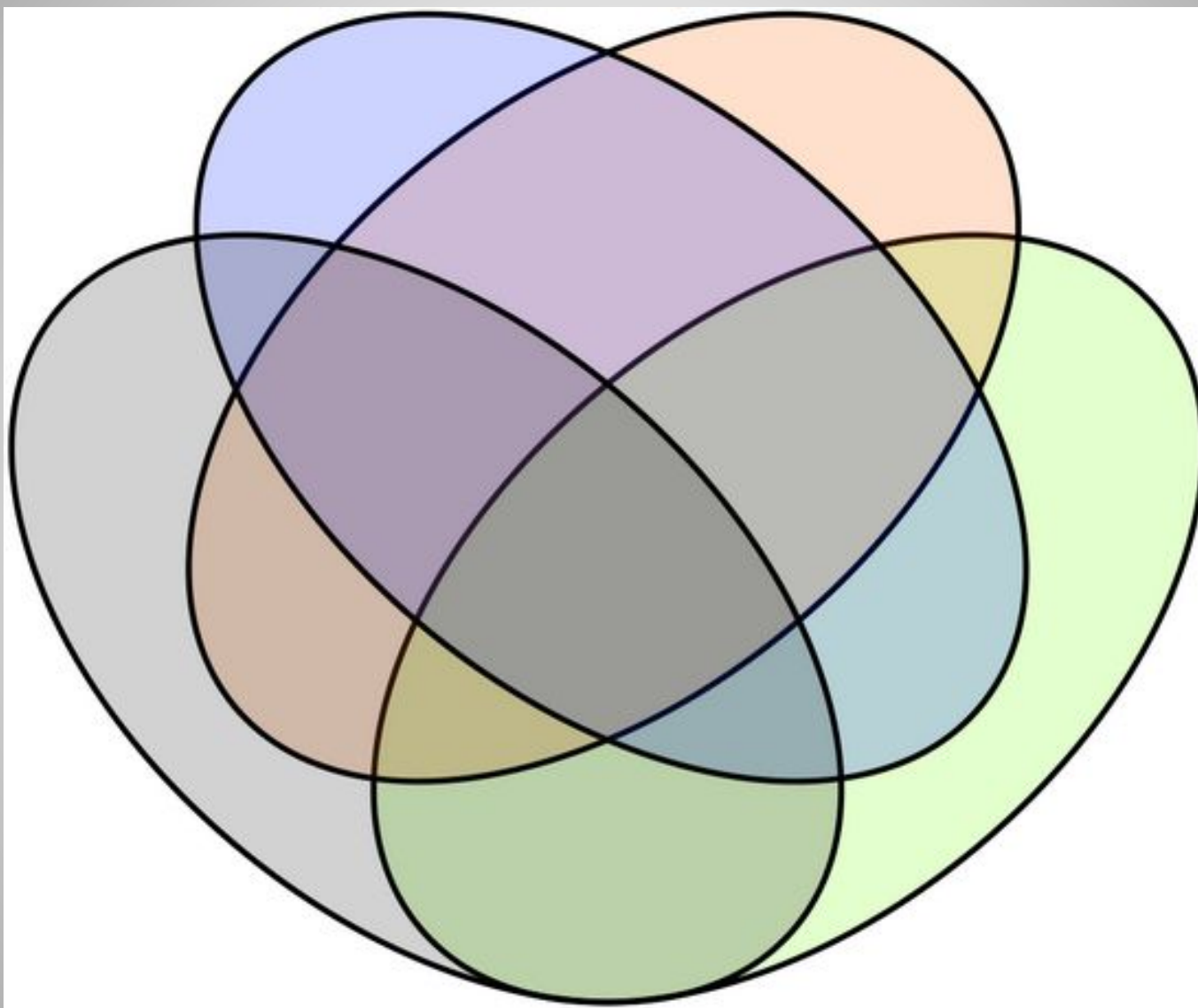


Задача 2

Студенты первого курса, изучающие информатику в университете, могут посещать и дополнительные дисциплины. В этом году 25 из них предпочли изучать бухгалтерию, 27 выбрали бизнес, а 12 решили заниматься туризмом. Кроме того, было 20 студентов, слушающих курс бухгалтерии и бизнеса, пятеро изучали бухгалтерию и туризм, а трое — туризм и бизнес. Известно, что 2 студента отважились посещать сразу три дополнительных курса. Сколько студентов посещали по крайней мере один дополнительный курс? Сколько из них были увлечены только туризмом?



Диаграммы Эйлера-Венна



Диаграммы Эйлера-Венна



— Ты умеешь считать? — спросила Белая Королева. — Сколько будет один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один плюс один?

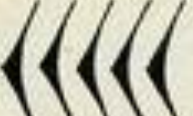
— Я не знаю, — ответила Алиса. — Я сбилась со счета.

— Она не умеет считать, — сказала Черная Королева.

Л. Кэрролл. Алиса в зазеркалье

Натуральные числа

Числа в Вавилоне

 1	 2	 3	 4	 5
 6	 7	 8	 9	 10
 11	 12	 13	 14	 15
 20	 31	 50	 60	 70

Числа в Китае

0	〇	零			
1	一	壹	10	十	拾
2	二	貳	20	廿/廿	貳拾
3	三	叁	30	卅	參拾
4	四	肆	40	卌	肆拾
5	五	伍			
6	六	陸	10^2	百	佰
7	七	柒	10^3	千	仟
8	八	捌	10^4	万	萬
9	九	玖	10^8	亿	億

Древний Рим

I

MMXVII

V

X

L

C

D

M

Древний Греция

Греческий числовой алфавит

Число	Буква	Название буквы	Число	Буква	Название буквы	Число	Буква	Название буквы
1	α	альфа	10	ι	иота	100	ρ	ро
2	β	бета	20	κ	каппа	200	σ	сигма
3	γ	гамма	30	λ	ламбда	300	τ	тау
4	δ	дельта	40	μ	мю	400	υ	ипсилон
5	ϵ	эпсилон	50	ν	ню	500	ϕ	фи
6	ς^*	стигма, дигамма	60	ξ	кси	600	χ	хи
7	ζ	дзета	70	$\omicron$	омикрон	700	ψ	пси
8	η	эта	80	π	пи	800	Ω	омега
9	θ	тэта	90	$\Q^*$	копа	900	$\aleph^*$	сампи, саде

Славяне

А	В	Г	Д	Е	З	И	Ѧ	
аз	веди	глаголь	добра	есть	зело	земля	иже	фита
1	2	3	4	5	6	7	8	9
І	К	Л	М	Н	Ѣ	О	П	Ч
и	како	люди	мыслете	наш	кси	он	покой	червь
10	20	30	40	50	60	70	80	90
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ψ	Ѡ	Ц
рцы	слово	твердь	ук	ферт	жа	пси	о	цы
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Япония

一

二

三

四

五

六

七

八

九

十

Десятичная система счисления

$$b_n b_{n-1} b_{n-2} \dots b_2 b_1 b_0 =$$

1254398021

1000000000

125,3689

Аксиомы Пеано

1. 0 есть натуральное число;
2. Следующее за натуральным числом есть натуральное число;
3. 0 не следует ни за каким натуральным числом;
4. Если натуральное число a следует за натуральным числом b и за натуральным числом c , то b и c тождественны;
5. Если какое-либо предложение доказано для 0 и если из допущения, что оно верно для натурального числа n , вытекает, что оно верно для следующего за n натурального числа, то это предложение верно для всех натуральных чисел.

Аксиомы Пеано

Пусть *следующий* для целого числа n будет обозначаться $s(n)$.

Тогда числа выглядят так:

$$1 = s(0);$$

$$2 = s(1) = s(s(0));$$

$$3 = s(2) = s(s(s(0)));$$

...

$$10 = s(9) = s(s(s(s(s(s(s(s(s(0)))))))));$$

...

$$n = s(n-1);$$

...

Свойства чисел

Математические свойства натуральных чисел зависят только от 0 и s, а не от представления их с помощью цифр.

Представления чисел с помощью цифр ни разу не использованы в работе Пеано за исключением символа 0, который достаточно условно взят как символ начала последовательности.

$10 > 8$, потому что $10 = s(s(8))$,

$10 = 7 + 3$, потому что $10 = s(s(s(7)))$.

Множество натуральных чисел

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

$$0 \in \mathbb{N}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s(n) \in \mathbb{N}$$

$$\nexists n \in \mathbb{N} : 0 = s(n)$$

$$a = s(n) \text{ и } a = s(k) \implies n = k$$

$$\left(P(0) \text{ и } (P(k) \implies P(k+1)) \right) \implies \forall n P(n)$$

Операции на множестве $\mathbb{N}$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n + m \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad m \cdot n \in \mathbb{N};$$

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad n + (m + k) = (n + m) + k;$$

$$\exists 0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n + 0 = 0 + n = n;$$

$$\exists 1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} : 1 \cdot n = n \cdot 1 = n;$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n + m = m + n;$$

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n \cdot m = m \cdot n;$$

$$\forall n, m, k \in \mathbb{N} \quad n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k.$$

Замкнутость сложения

Замкнутость умножения

Замкнутость возведения в степень

Сравнения больших натуральных чисел

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ