Дискретная математика

Множество – это совокупность определенных различаемых объектов таких, что для любого объекта можно установить, принадлежит объект данному множеству или нет.

- Множество, которое подчиняется лишь такому ограничению, может содержать объекты почти любой природы.

Георг Кантор определил множество так:

Множество – это многое, мыслимое как целое.

Например:

- \- множество всех станций Московского метро;
- \- множество левых ботинок;
- \- множество натуральных чисел: 1, 2, 3, 4 и т. д.;
- \- множество символов, доступных специальному печатающему устройству;
- \- множество кодов операций конкретного компьютера.

- множество всех натуральных чисел: 1, 2, 3, . . . Обозначим N. Часто 0 считают натуральным числом. Множество N с добавлением 0 обозначается N_0.
- - множество всех натуральных чисел, не превосходящих 100.
- - множество всех решений уравнения

$$\left| sin\, x \right| = 1$$

Множество обозначают заглавными буквами, а его элементы – прописными.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Говоря об определенном множестве, мы полагаем, что для каждого объекта имеется две возможности: элемент либо входит в множество $x \in X$, либо нет $x \notin X$.

Мощность множества – количество его элементов.
Обозначение мощности: $|A|$.

- Множество, не содержащее элементов, называется ***пустым множеством*** и обозначается $\varnothing$.

$$|\varnothing| = 0$$

В зависимости от их мощности множества различают как ***конечные*** или ***бесконечные***.
Конечные множества могут состоять из одного или нескольких элементов.

Способы задания множества:

- Перечисление всех элементов множества (**список**), например, множество однозначных неотрицательных чисел

$$X = \{0,1,2,3,\ldots 9\}.$$

- Множества часто рассматриваются как “неупорядоченные совокупности элементов”, хотя иногда полезно подчеркнуть, что, например

$$X = \{0,1,2\} = \{2,1,0\} = \{2,0,1\}.$$

- Выясним далее, какие из приведенных определений верные:

$$B = \{1,2,3\}.$$

$$C = \{5,6,6,7\}.$$

$$D = \{B, C\}.$$

Порождающая процедура

- Описывает способ получения элементов множества из уже полученных элементов либо других объектов. Тогда элементы множества - все объекты, которые могут быть получены (построены) с помощью такой процедуры.

- Множество M_{2^n} натуральных степеней двойки.
- Порождающую процедуру зададим рекуррентно:

$$m \in M_{2^n}; 2m \in M_{2^n}$$

- Какое множество задается рекуррентной формулой:

$$x_1 = 1,\ x_n = x_{n-1} \cdot n$$

Задание множества описанием его элементов (разрешающая процедура)

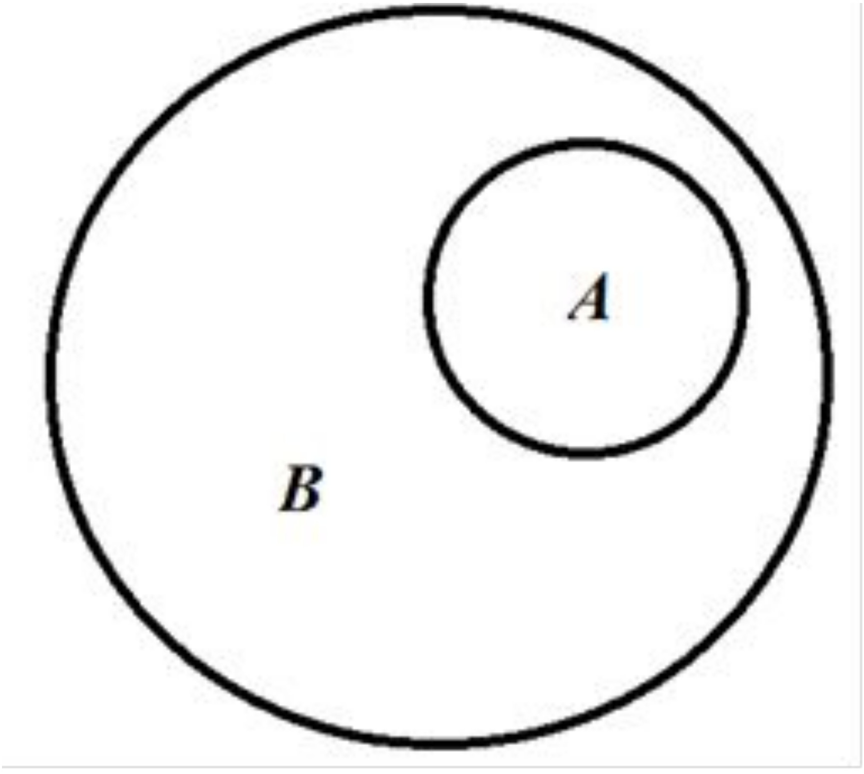
указание общего свойства, которым обладают все элементы множества, например, множество четных натуральных чисел

$$X = \{2,4,6,8,10,12...\}$$

или

$$X = \{x : x = 2n, \forall n \notin N\};$$

Множество A называют ***подмножеством множества*** B (обозначается $A \subseteq B$), если каждый элемент множества A является также элементом множества B.



Множества A и B называют ***равными*** ($A = B$), если каждый элемент множества А является одновременно элементом множества В и наоборот,

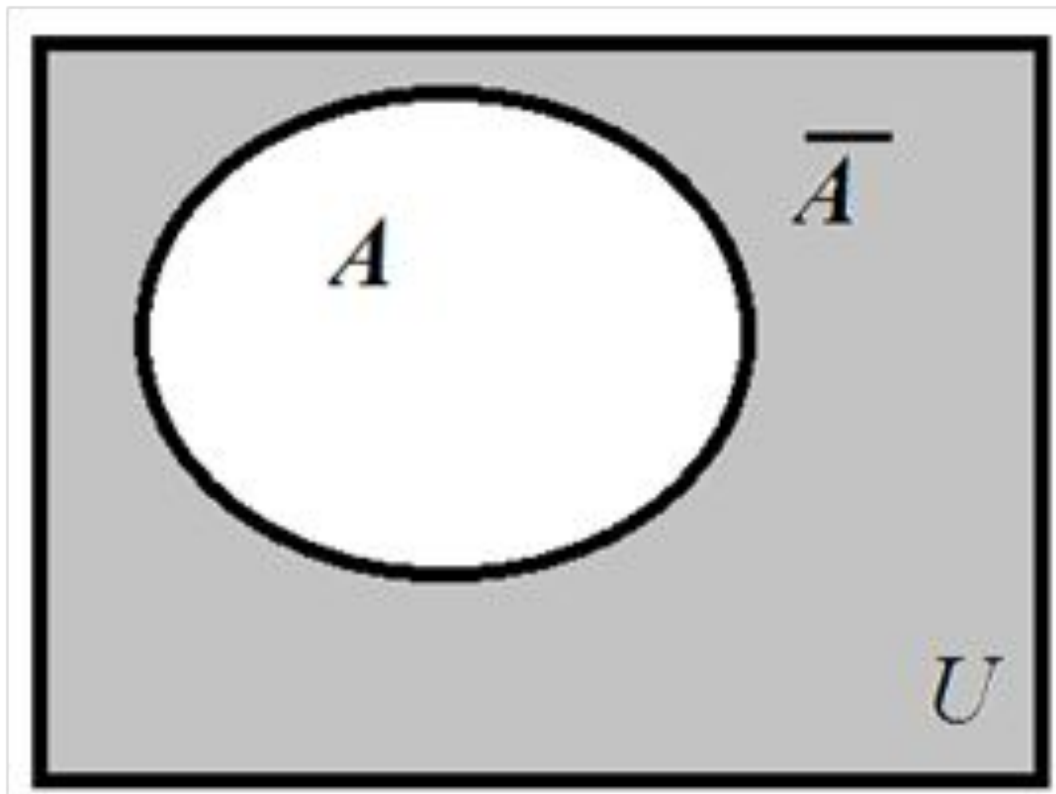
т.е. если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$.

Другими словами, два множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов.

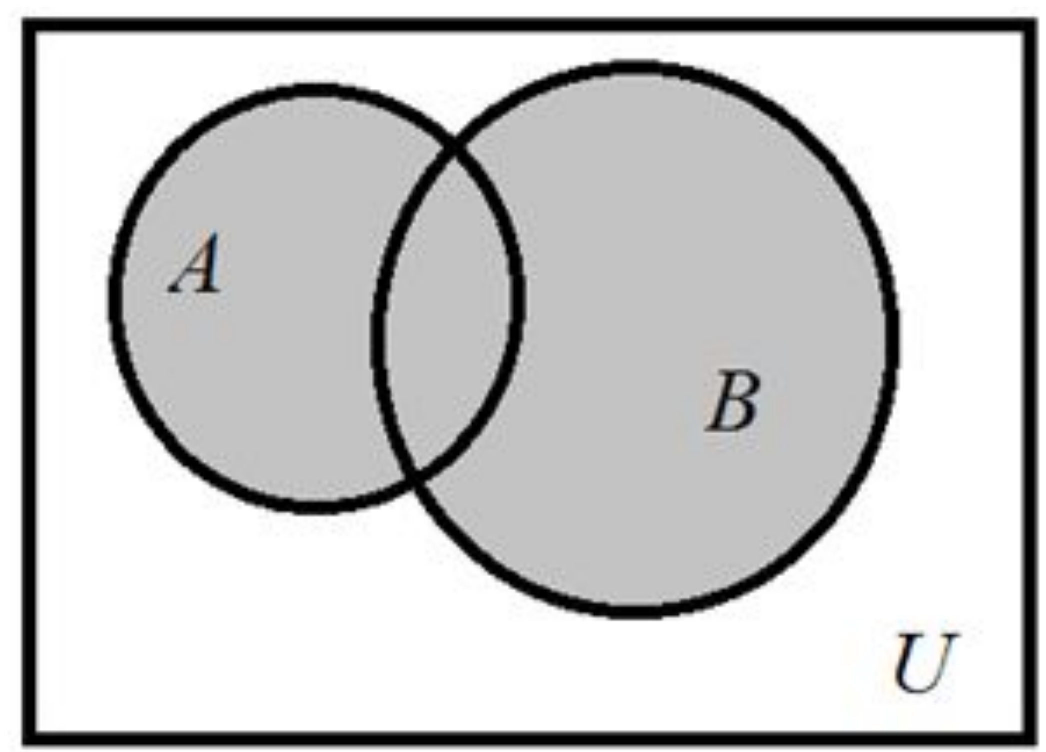
Множество U называется ***универсальным множеством*** *(множество всех подмножеств)* для некоторой системы множеств, если каждое множество этой системы является подмножеством U, т.е.

$$A \subseteq U, B \subseteq U, C \subseteq U \ldots$$

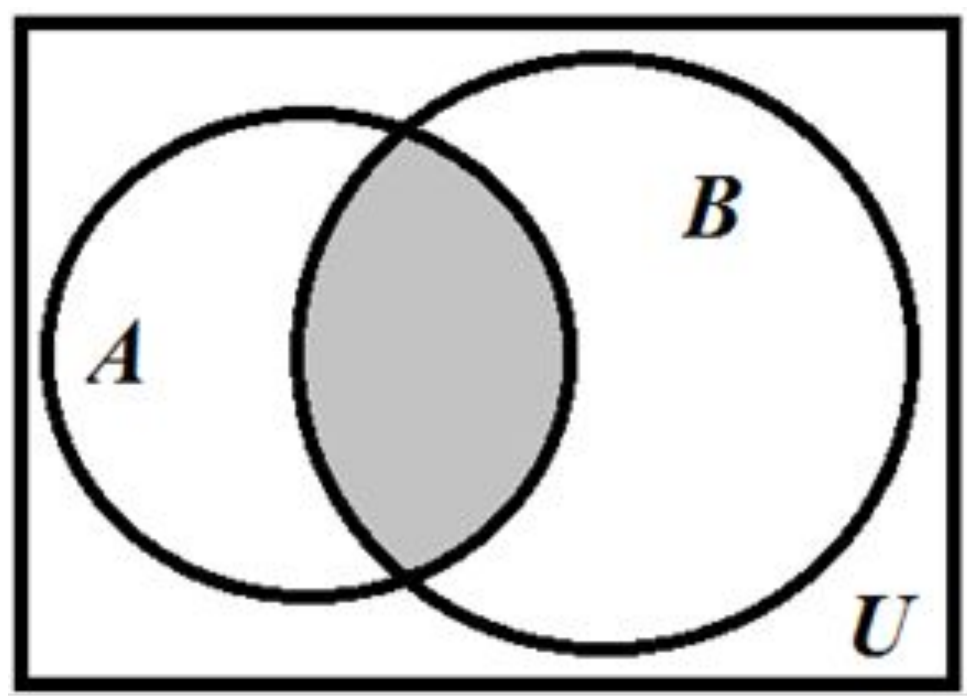
Дополнением множества $A(\overline{A})$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов универсального множества, которые не входят в множество A.



Объединением двух множеств A и B ($A \cup B$) называется множество C, состоящее из тех элементов, которые принадлежат или множеству A, или B, или A и B одновременно.

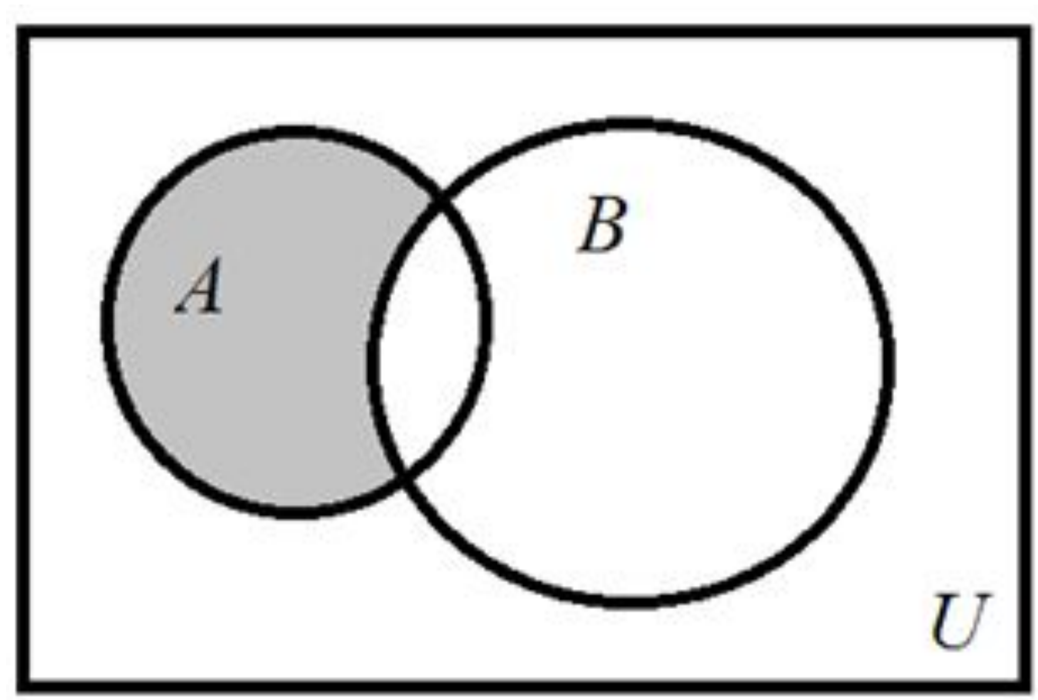


Пересечением двух множеств A и B ($A \cap B$) называется множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.



Разностью двух множеств A и B ($A - B$ или $A \setminus B$) называется множество тех элементов множества A , которые не принадлежат множеству B:

$$A - B = A \cap \overline{B}$$



Прямым (декартовым) произведением двух множеств A и B называется множество, состоящее из упорядоченных пар элементов, в которых первый элемент принадлежит множеству A, а второй – множеству B.

Пример 1: Заданы два множества:

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ и $B = \{0, 2, 4, 5\}$.
Определить множества $A \cap B$; $A \cup B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$ и их мощность.

Решение:

Множество $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ состоит из пяти элементов, следовательно мощность этого множества равна 5: $|A| = 5$.

Аналогично, $B = \{0, 2, 4, 5\}$ содержит 4 элемента: $|B| = 4$.

По определению ***пересечение*** двух множеств состоит только из общих для обоих множеств элементов, следовательно,

$$A \cap B = \{0,\ 2\} \text{ и } |A \cap B| = 2.$$

По определению ***объединение*** двух множеств состоит из всех элементов, которые принадлежат только множеству A, или только множеству B, или множествам A и B одновременно, следовательно,

$$A \cup B = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 5\} \text{ и } |A \cup B| = 7.$$

Множество $A \setminus B$ является ***разностью*** двух множеств A и B и состоит из элементов множества A, которые одновременно не принадлежат множеству B, следовательно $A \setminus B = \{-2, -1, 1\}$ и $|A \setminus B| = 3$.

Аналогично, $B \setminus A = \{4, 5\}$ и $|B \setminus A| = 2$.

Пример 2

- Прямое (декартово) произведение:

  $A \times B$ = {(-2, 0); (-2, 2); (-2, 4); (-2, 5); (-1, 0); (-1, 2); (-1, 4); (-1, 5); (0, 0); (0, 2); (0, 4); (0, 5); (1, 0); (1, 2); (1, 4); (1, 5); (2, 0); (2, 2); (2, 4); (2, 5)}
- $B \times A$ = {(0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (0, 2); (2, -2); (2, -1); (2, 0); (2, 1); (2, 2); (4, -2); (4, -1); (4, 0); (4, 1); (4, 2); (5, -2); (5, -1); (5, 0); (5, 1); (5, 2)}

Пример 2

- **Из этого примера видно, что**

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |B \times A| = |A| \cdot |B| = 5 \cdot 4 = 20.$$

Пример 3:

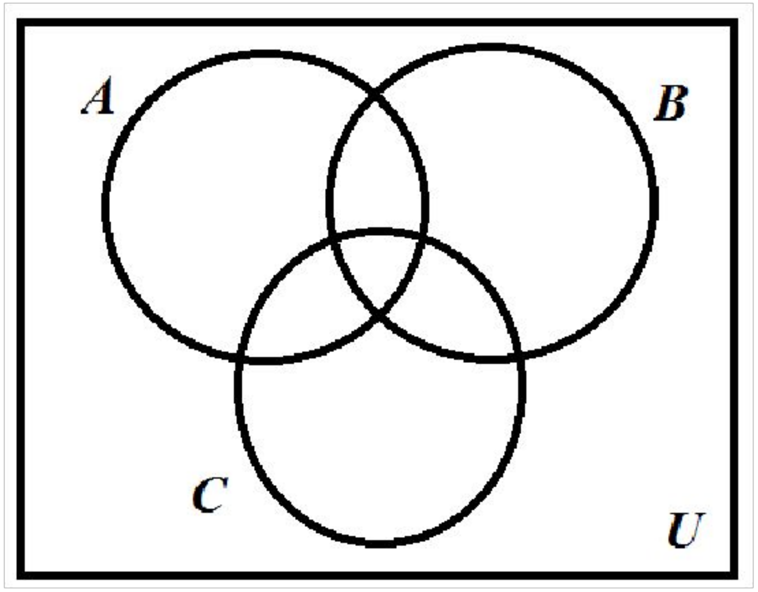
На диаграмме Вьенна-Эйлера изобразить результат действия

$$\left(A \square \overline{B}\right) - C \; .$$

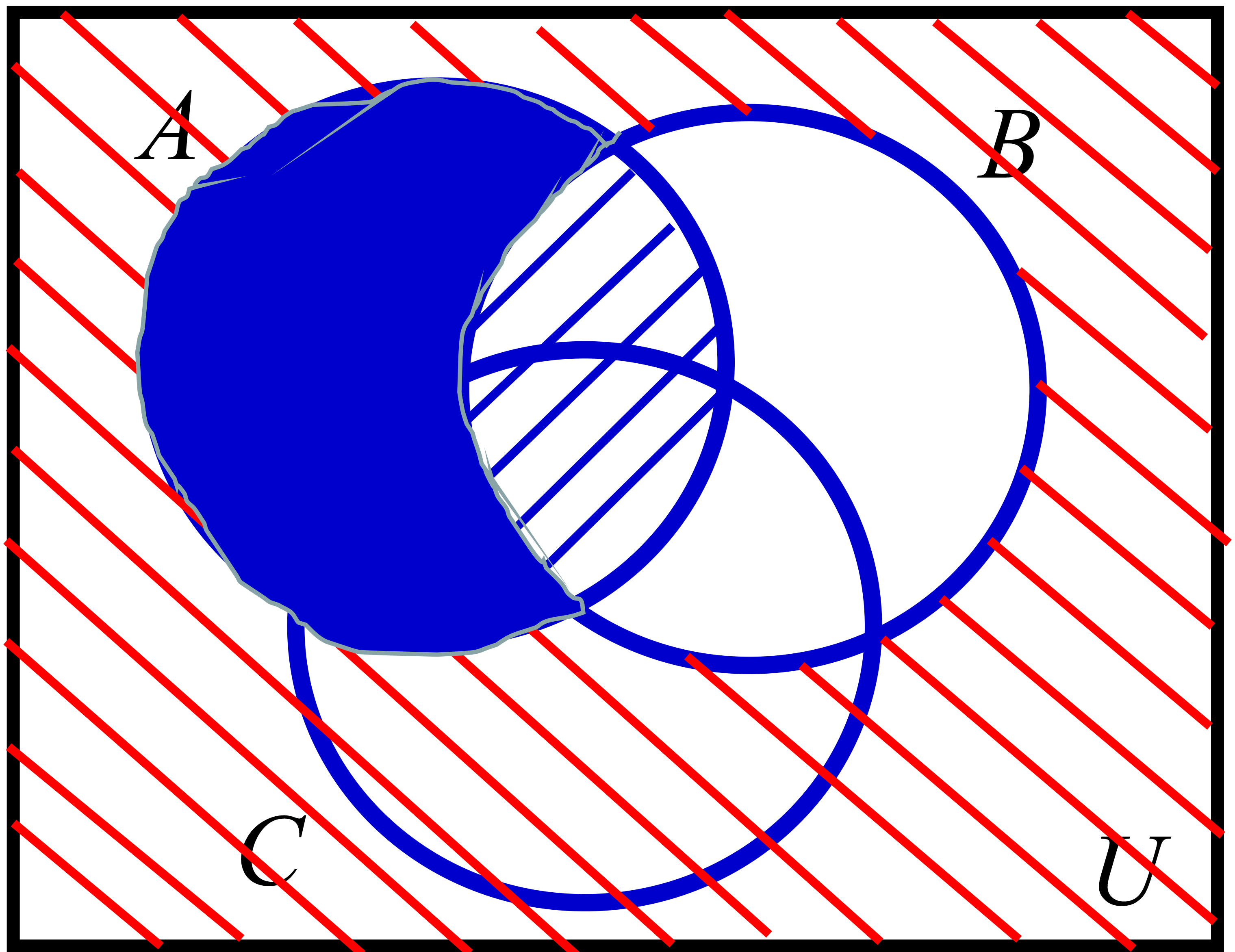
Решение:

Решаем по действиям. На каждой копии диаграммы необходимо восстановить контуры всех множеств, участвующих в задании. Они должны пересекаться в самом общем виде. Самый большой контур – универсальное множество. Оно содержит в себе все множества задачи.

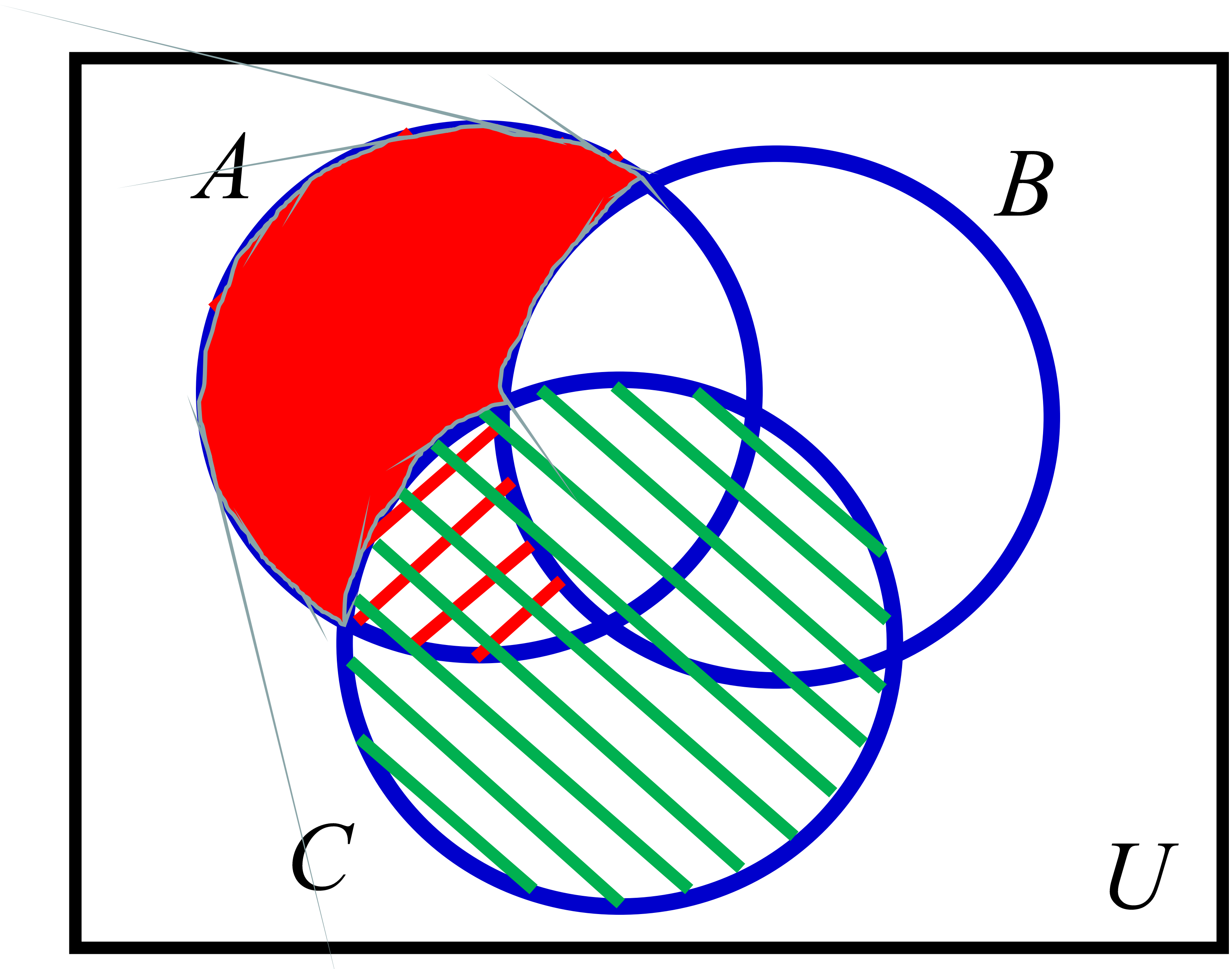
Основа диаграммы для выполнения каждого действия.



1) Изобразим на 1 диаграмме множества, вступающие в 1 действие (действие в скобках). Каждое множество заштриховываем штриховкой своего вида (с наклоном влево, с наклоном вправо, горизонтальной или вертикальной). Множества штрихуются ***целиком,*** независимо от их пересечения с другими множествами диаграммы.


A
B
C
U

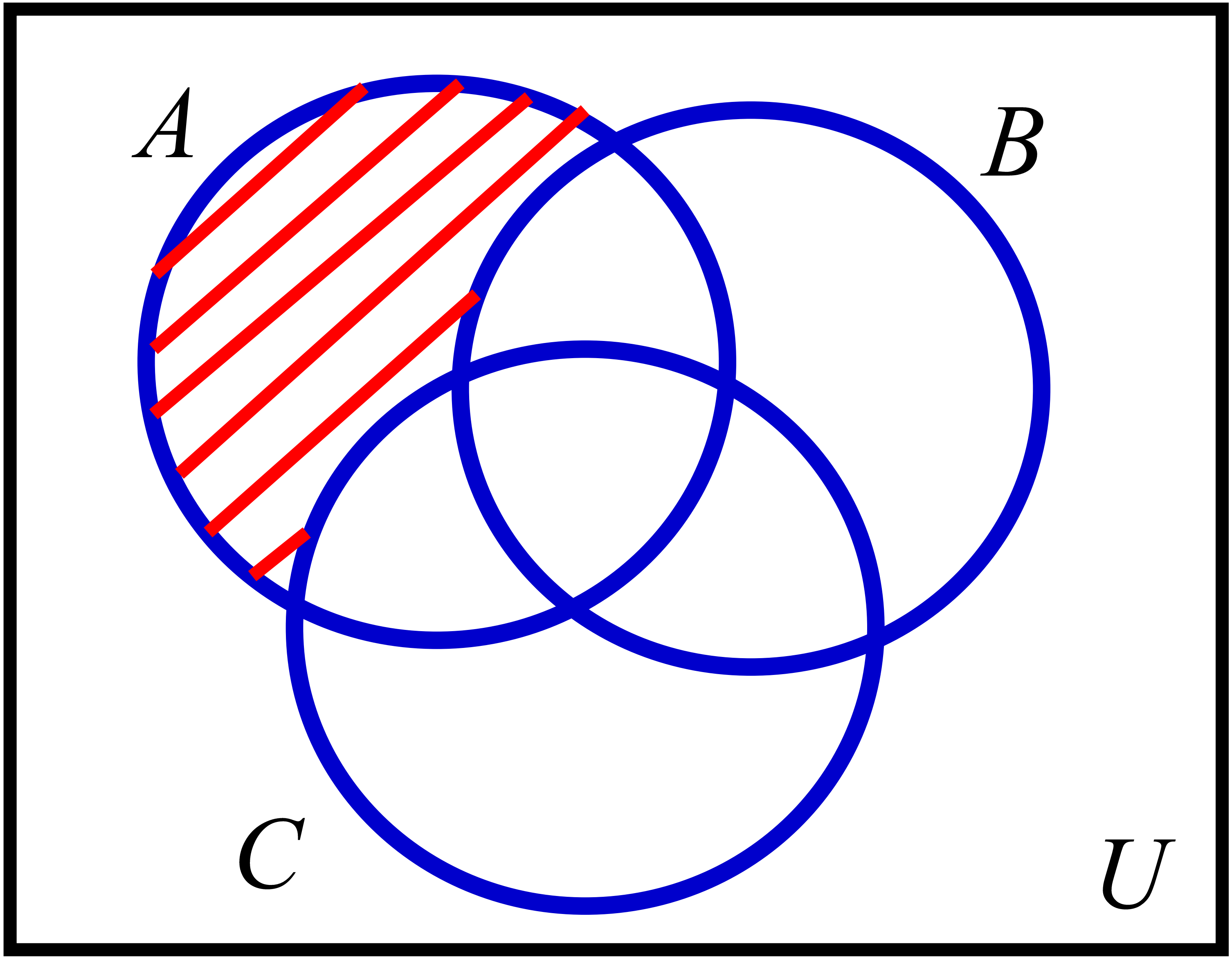
2) На 2 копии диаграммы надо заштриховать множества, вступающие во второе действие: это результат первого действия и *C*. У каждого из этих множеств на рисунке ***одинарная*** штриховка своего вида (цвета).


A
B
C
U

3) На 3 копии диаграммы надо заштриховать множество, которое будет являться ответом.

Штриховка – ***одинарная***.

Заметим, что на каждой копии диаграммы, кроме последней, должно быть ровно два вида штриховки, а на последней копии – один.


A
B
C
U

Выучить или переписать в тетрадь определения на слайдах

2, 3, 6-8, 10, 12-20