

Методы решения геометрических задач

ЕГЭ, задание С2

(Расстояние от точки до плоскости)

Подготовил:

учитель математики

***МОУ «СОШ №10 с. Солдато-
Александровского»***

Кобзев Д.А.

2012 – 2013 уч.г.

Расстояние от точки до плоскости

Методы

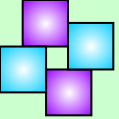
***Поэтапно-вычислительный
метод***

***Метод параллельных
прямых и плоскостей***

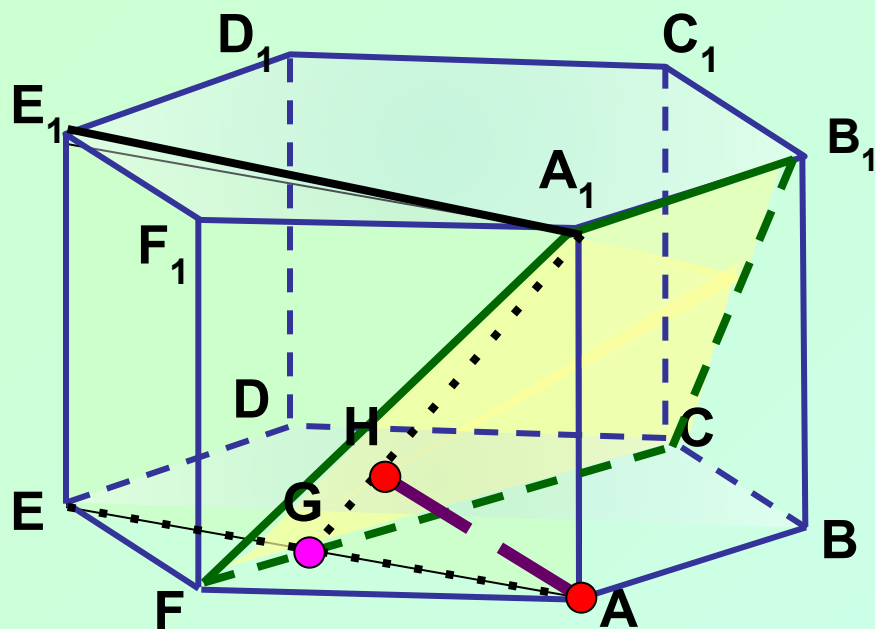
Векторный метод

Координатный метод

Метод объемов



В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости $A_1 B_1 C$.



$$FC \perp AE, FC \perp AA_1 \Rightarrow FC \perp (AA_1 E_1).$$

$$FC \cap AE = G.$$

$$(AA_1 E_1) \perp (A_1 B_1 C) - [FC \in (A_1 B_1 C)],$$

$$(AA_1 E_1) \cap (A_1 B_1 C) = A_1 G.$$

Высота AH в треугольнике $AA_1 G$ –
искомое расстояние.

Из прямоуго. треугольника ADE :

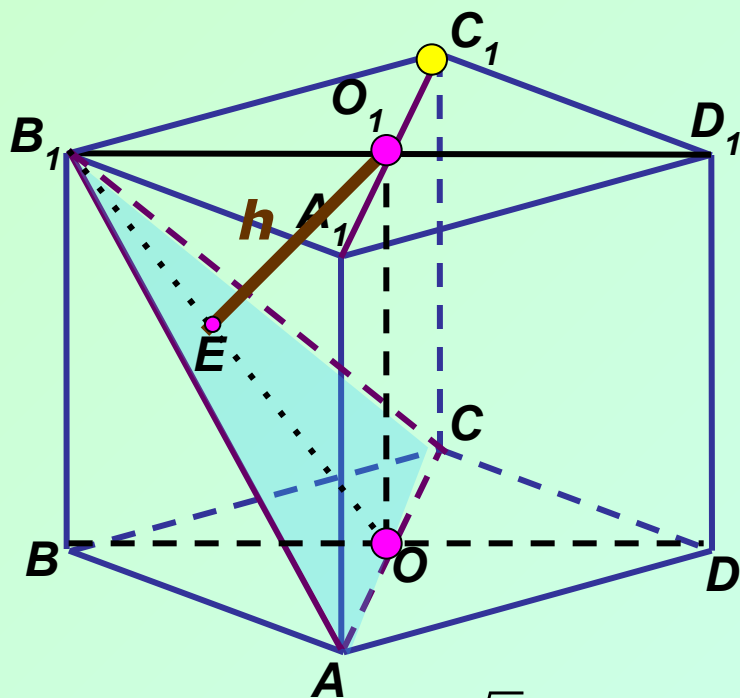
$$AE = \sqrt{AD^2 - ED^2} = \sqrt{3}, AG = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из прямоуго. треугольника AGA_1 : $GA_1 = \sqrt{\frac{3}{4} + 1} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$

$$AH = \frac{AG \cdot AA_1}{GA_1} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{3}{7}}.$

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние от точки C_1 до плоскости $AB_1 C$



$A_1 C_1 \parallel AC$, то $A_1 C_1 \parallel (AB_1 C)$.

Поэтому искомое расстояние h равно расстоянию от произвольной точки $A_1 C_1$ до плоскости $AB_1 C$.

Обозначим расстояние от O_1 до $(AB_1 C)$ через h .

Покажем, что $O_1 E \perp AB_1 C$.

$O_1 E \in BB_1 D_1 D$, $AC \perp BB_1 D_1 D \Rightarrow O_1 E \perp AC$

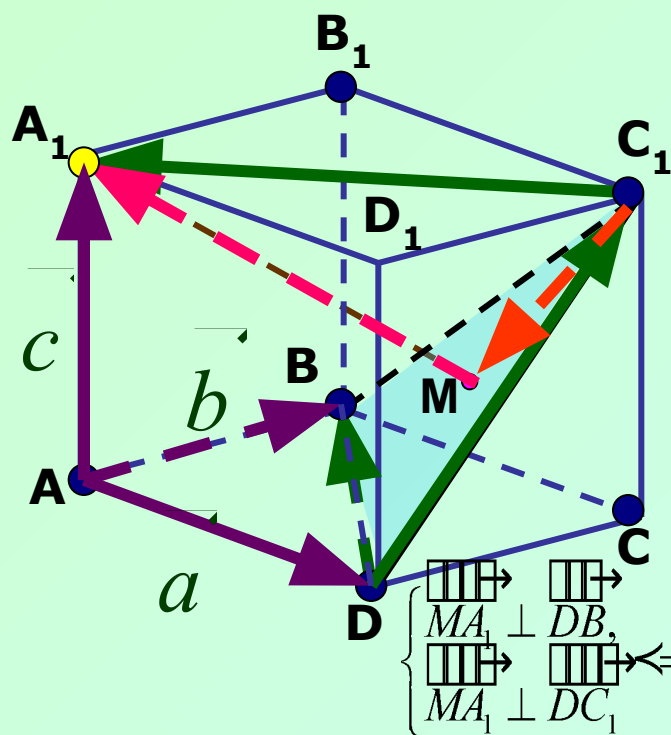
$O_1 E$ – перпендикуляр к $(AB_1 C)$, а $O_1 E = h$

Так как $B_1 O_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $O_1 O = 1$, то из прямоугольного треугольника $OB_1 O_1$:

$$OB_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}. \quad \text{Искомое расстояние: } h = \frac{B_1 O_1 \cdot O_1 O}{OB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 : \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

В единичном кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ найти расстояние от точки A_1 до плоскости BDC_1



Пусть $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$, тогда

$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1, \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0.$$

Выразим векторы $\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC_1}, \overrightarrow{C_1A_1}$ через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$$\overrightarrow{DB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DC_1} = \vec{b} + \vec{c}, \overrightarrow{C_1A_1} = -\vec{a} - \vec{b}.$$

Пусть $MA_1 \perp BDC_1; M \in BDC_1$.

$$\overrightarrow{C_1M} = x \cdot \overrightarrow{DB} + y \cdot \overrightarrow{DC_1}.$$

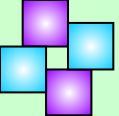
$$\overrightarrow{MA_1} = \overrightarrow{C_1A_1} - \overrightarrow{C_1M} = \overrightarrow{C_1A_1} - (x \cdot \overrightarrow{DB} + y \cdot \overrightarrow{DC_1}).$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{DB}, \\ \overrightarrow{MA_1} \perp \overrightarrow{DC_1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{DB} = 0, \\ \overrightarrow{MA_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{DB} - (x \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB} + y \cdot \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{DB}) = 0, \\ \overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} - (x \cdot \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DC_1} + y \cdot \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{DC_1}) = 0. \end{cases}$$

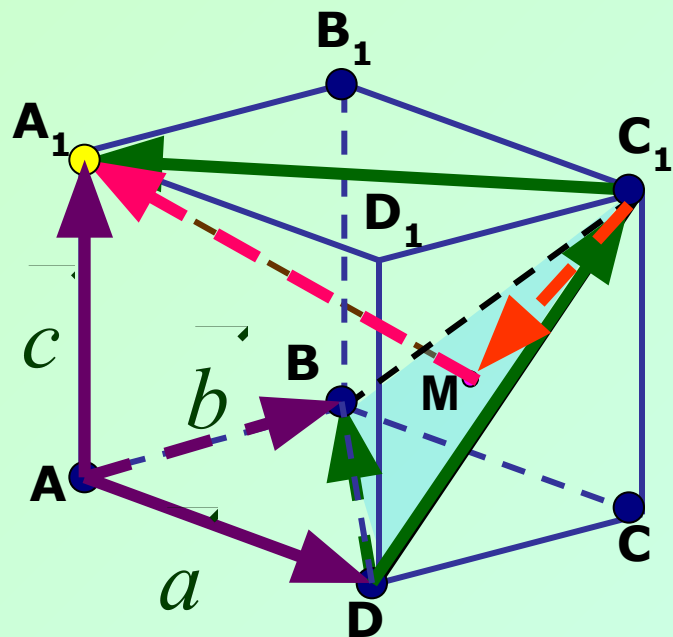
$$\overrightarrow{C_1A_1} \cdot \overrightarrow{DB} = (-\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = -\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} = 1 - 1 = 0; \overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 - 0 + 0 - 0 = 1,$$

$$\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{C_1A_1} = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} - \vec{b}) = -\vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{c} \cdot \vec{b} = 0 - 1 - 0 - 0 = -1; \overrightarrow{DB}^2 = (\vec{b} - \vec{a})^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{a} = 2,$$

$$\overrightarrow{DC_1}^2 = (\vec{b} + \vec{c})^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c} = 2,$$



Имеем:



$$\begin{cases} 0 - (x \cdot 2 + y \cdot 1) = 0, \\ -1 - (x \cdot 1 + y \cdot 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0, \\ x + 2y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

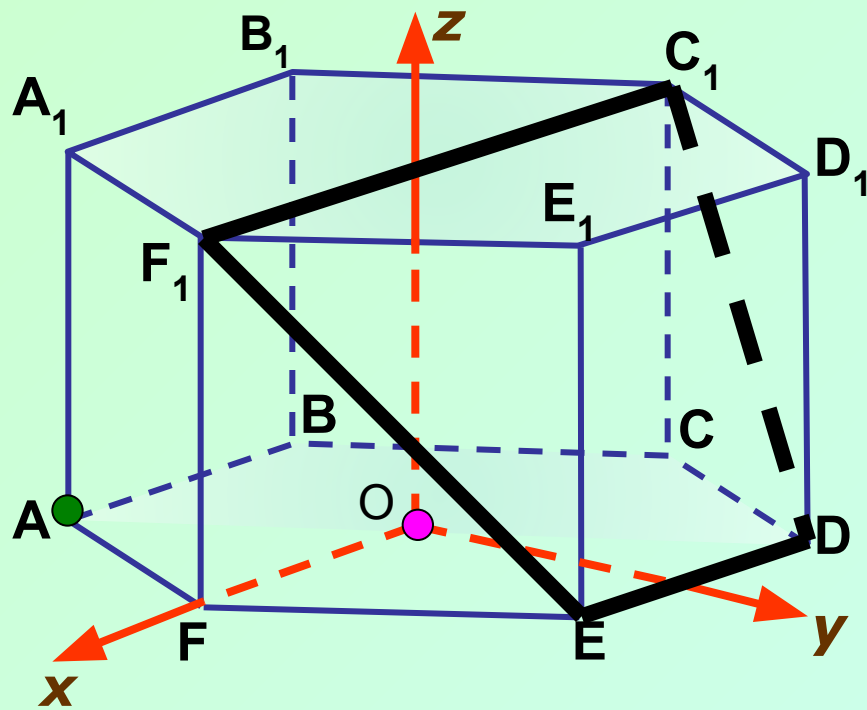
$$\overrightarrow{MA_1} = -\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

Таким образом

$$|\overrightarrow{MA_1}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{3}}{3}.$

В правильной шестиугольной призме $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$, ребра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости DEF_1



Введем систему координат и найдем координаты точек:

$$A\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), D\left(-\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), E\left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), F_1(1; 0; 1).$$

$ax + by + cz + d = 0$ – уравнение (DEF_1) .

Подставим координаты точек

D, E, F_1 в уравнение:

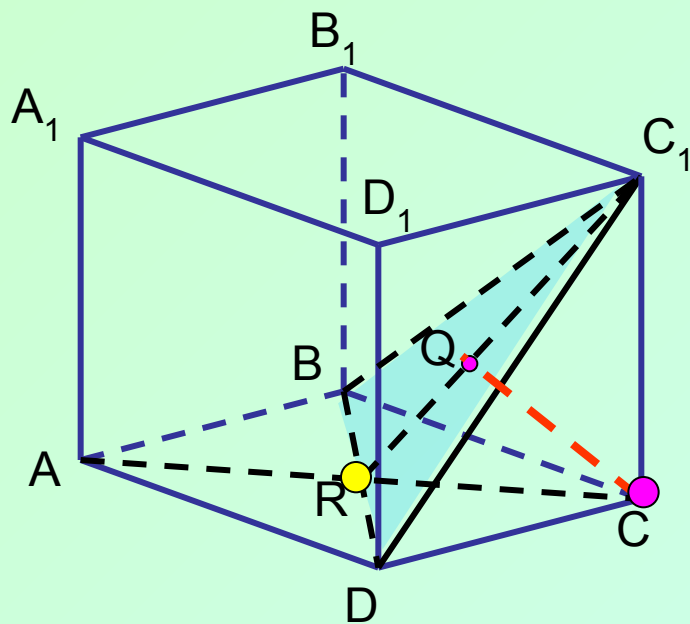
$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, (D) \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0, (E) \\ a + c + d = 0. (F_1) \end{cases} \begin{cases} a = 0, \\ b = -\frac{2\sqrt{3}}{3}d, \\ c = -d. \end{cases}$$

уравнение (DEF_1) : $2\sqrt{3}y + 3z - 3 = 0$.

$$\rho(A, DEF_1) = \frac{\left|0 \cdot \frac{1}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 0 - 3\right|}{\sqrt{0^2 + (2\sqrt{3})^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Ответ: $\frac{2\sqrt{21}}{7}$.

Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно a . Найти расстояние от точки C до плоскости BDC_1



Расстояние x равно высоте CQ , опущенной в пирамиде $BCDC_1$ из вершины C на основание BDC_1

$$V_1 = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot CC_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot CC_1 = \frac{a^3}{6}.$$

Треугольник BDC_1 – равносторонний.

$$V_2 = \frac{1}{3} S_{BC_1D} \cdot CQ = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot x = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x.$$

Так как $V_1 = V_2$, то получаем уравнение: $\frac{a^3}{6} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{6} \cdot x; x = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

Ответ: $\frac{a\sqrt{3}}{3}.$