



# МАТЕМАТИКА И МУЗЫКА

Работу выполнила:  
Клементьевская Марина  
Валентиновна  
МОУ «Общеобразовательная  
гимназия №3», г.Архангельск

Научный руководитель:  
Косарева Галина Николаевна,  
учитель математики ВКК,  
зав. кафедрой физики-математики,  
Почётный работник общего  
образования РФ

# ВВЕДЕНИЕ



- Математика — самая абстрактная из наук, а музыка — наиболее отвлеченное из искусств, это высшие выразители науки и искусства.

Волошинов А.





# ВВЕДЕНИЕ

**Цель работы:** провести параллель между математикой и музыкой.

**Задачи:**

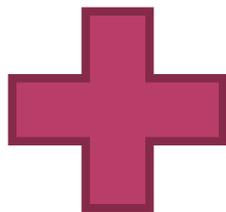
- 1) познакомиться с пифагорейским учением о связи между математикой и музыкой;
- 2) разобрать основные правила консонанса и доказать их математическую природу;
- 3) в ходе исследования проверить, действуют ли пифагорейские правила консонанса до сих пор;
- 4) доказать благотворное влияние изучения музыки на математические способности и наоборот.

**Методы исследования:**

- 1) поиск, анализ и синтез различных источников информации: книг, статей, Интернет-ресурсов;
- 2) математический анализ музыкальных аккордов;
- 3) анкетирование.

# ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы** состоит в том, что многие не понимают, что математика и музыка родственны. Родители не принимают во внимание тот факт, что музыкальное образование развивает способности к математике. Учитывая, что математика становится всё более популярным, но остаётся при этом не менее сложным предметом, ценность музыки и музыкального образования как вспомогательного должна повышаться.



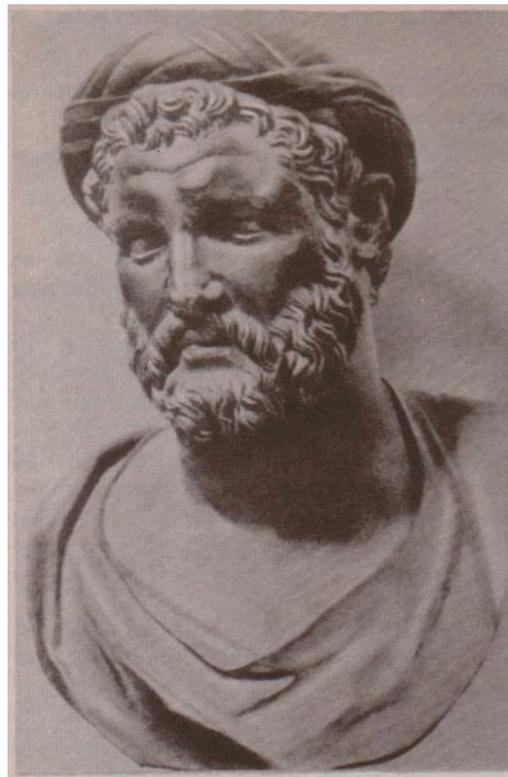
# 1. ПИФАГОР И ПИФАГОРЕЙСКОЕ УЧЕНИЕ

*Музыка, математика – сколь родственны они.  
Имре Мадач (венгерский писатель)*



# ПИФАГОР

- ◎ Пифагор — едва ли не самый популярный ученый не только в античности, но и в наши дни.

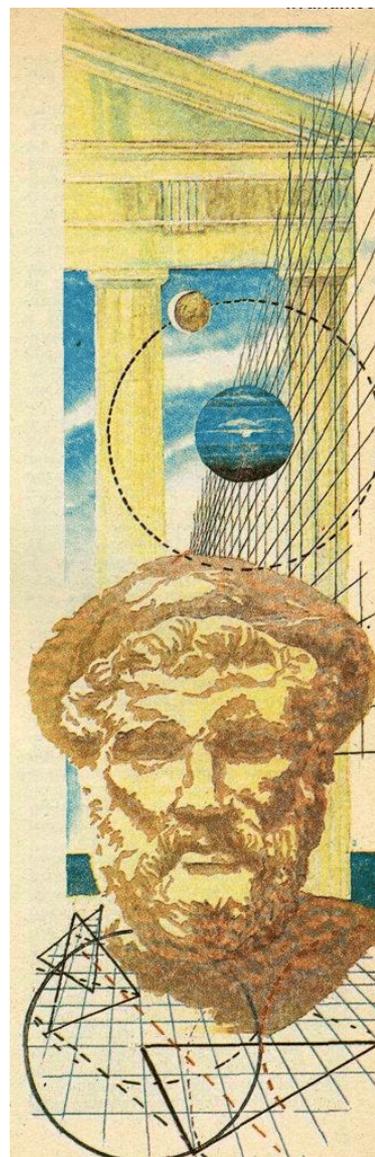


# ЗАСЛУГИ ПИФАГОРА

- Пифагор учил математике, музыке, астрономии, медицине, принципам политической деятельности, этике и многому другому. Из его школы вышли выдающиеся политические и государственные деятели, историки, математики и астрономы.
- Числа, равные сумме своих делителей, воспринимались как совершенные; дружественными называли пары чисел, из которых каждое равнялось сумме делителей другого. Пифагор впервые разделил числа на четные и нечетные, простые и составные, ввел понятие фигурного числа. В его школе были подробно рассмотрены тройки натуральных чисел, у которых квадрат одного равнялся сумме квадратов двух других.
- Геометрия у Пифагора была подчинена арифметике. Это ярко проявилось в теореме, носящей его имя и ставшей в дальнейшем основой применения численных методов геометрии.
- Пифагору приписывают систематическое введение доказательств в геометрию, создание планиметрии прямолинейных фигур, учение о подобии.
- Пифагор одним из первых считал, что Земля имеет форму шара и является центром Вселенной.

# ПИФАГОР

- В математике, в познании количественных отношений, видели пифагорейцы ключ к разгадке мировой гармонии, постижение которой и составляло смысл их жизни.



# ПИФАГОРЕЙСКОЕ УЧЕНИЕ

- Отправным пунктом в пифагорейском учении о числе была музыка. Именно в музыке была впервые обнаружена таинственная направляющая роль чисел в природе. По преданию, сам Пифагор установил, что приятные слуху созвучия получаются лишь в том случае, когда длины струн, издающих эти звуки, относятся как целые числа первой четверки: 1:2, 2:3, 3:4. Это открытие потрясло Пифагора и долго вдохновляло его учеников на поиски новых числовых закономерностей в природе.



# ПИФАГОРЕЙСКОЕ УЧЕНИЕ

- С этого времени музыка, точнее теория музыки или учение о гармонии, занимает почетное место в пифагорейской системе знаний. «Музыкантов»-пифагорейцев интересовало не столько музыкальное искусство, сколько те математические пропорции и соотношения, которые, как считалось, лежат в основе музыки.
- Идея музыкальных соотношений настолько увлекла пифагорейцев, что они пытались обнаружить их всюду.



# ПИФАГОРЕЙСКОЕ УЧЕНИЕ

- Музыка и астрономия были сведены пифагорейцами к анализу числовых закономерностей, т. е. к арифметике и геометрии. Все четыре дисциплины стали считаться математическими и называться одним словом — «математа».
- Термины «наука» и «искусство» в далекие времена античности практически не различались. Пифагорейцы называли математику и музыку родными сестрами. Музыка пронизана математикой, как и математика полна поэзии и музыки. Это прекрасно чувствовали древние греки.

# ПИФАГОРЕЙСКИЙ ЗВУКОРЯД 📢

- ◉ *Гаммой*, или *звукорядом*, называется последовательность звуков некоторой музыкальной системы, расположенных, начиная от основного звука, в восходящем или нисходящем порядке.
- ◉ Важнейшей характеристикой музыкального звука является его высота, представляющая отражение в сознании частоты колебания звучащего тела, например струны. Чем больше частота колебаний струны, тем «выше» представляется нам звук.



# ПИФАГОРОВ ЗВУКОРЯД



- Согласованное сочетание двух звуков называется *консонансом*, а несогласованное – *диссонансом*.
- *Ладом* называется приятная для слуха взаимосвязь музыкальных звуков, определяемая зависимостью неустойчивых звуков от устойчивых, и прежде всего от основного устойчивого звука – тоники, и имеющая определенный характер звучания – наклонение.



# ЗАКОНЫ ПИФАГОРА-АРХИТА



1. Высота тона (частота колебаний  $f$ ) звучащей струны обратно пропорциональна ее длине  $l$ .
2. Две звучащие струны дают консонанс лишь тогда, когда их длины относятся как целые числа, составляющие треугольное число  $10=1+2+3+4$ , т. е. как 1:2, 2:3, 3:4.
3. Если в качестве цены деления шкалы монохорда взять отрезок  $l$ , равный  $1/12$  длины струны монохорда  $l_1$ , то вместе со всей струной монохорда длины  $l_1 = 12l$  будут созвучны ее части длины  $l_2 = 6l$  — звук на октаву выше ( $l_2/l_1 = 1/2$ ),  $l_3 = 9l$  — звук на квинту выше ( $l_3/l_1 = 2/3$ ) и  $l_4 = 8l$  — звук на кварту выше ( $l_4/l_1 = 3/4$ ). Это созвучие и определяющие его числа 6, 8, 9, 12 назывались *тетрада* (четверка).



# ВЫВОДЫ ПИФАГОРА-АРХИТА

- Квинта есть среднее гармоническое длин струн основного тона  $l_1$  и октавы  $l_2$ , а кварта – среднее арифметическое  $l_1$  и  $l_2$ .
- Октава есть произведение квинты на кварту.
- Октава так относится к квинте, как кварта к основному тону.
- Октава делится на два неравных консонансных интервала – квинту и кварту. Интервал, дополняющий данный интервал до октавы, называется его обращением.



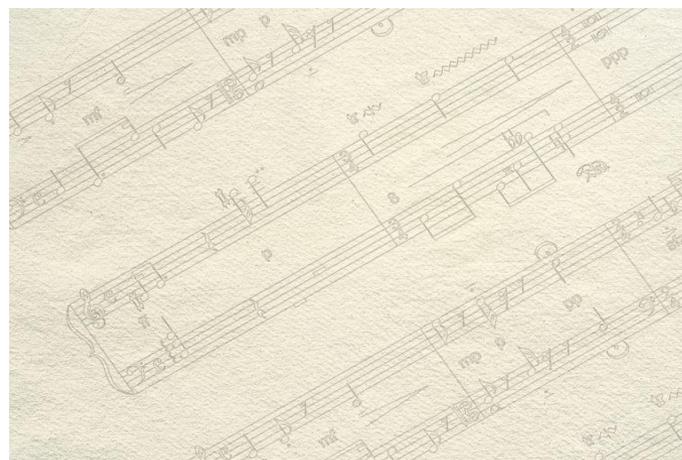
# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ



- К 1700 г. немецкий органист Андреас Веркмейстер осуществил смелое и гениально простое решение: он отказался от совершенных и несовершенных консонансов — квинт, кварт и терций, оставив в первозданной консонантной красе лишь одну октаву, и попросту разделил ее геометрически на 12 равных частей. Так в музыке восторжествовала *темперация* (лат. соразмерность), а новый двенадцатизвуковой строй был назван *равномерно-темперированным*.

# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ

- Вначале, разумеется, были попытки улучшить чистый строй, который сохранял главный недостаток пифагорова строя: невозможность безболезненного перехода из тональности в тональность. Естественным желанием при решении этой проблемы было увеличить количество звуков в октаве.



# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ

до	ре	ми	фа	соль	ля	си	до <sub>1</sub>	ре <sub>1</sub>	ми <sub>1</sub>	фа <sub>1</sub>	соль <sub>1</sub>	ля <sub>1</sub>	си <sub>1</sub>
1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2	9/4	5/2	8/3	3	10/3	15/4
	9/8	81/64	45/32	3/2	27/16	15/8	135/64		81/32	45/16		27/8	
		5/4	45/32	25/16	5/3	15/8	25/12	75/32	5/2		25/8		
			4/3	3/2	5/3	16/9	2	20/9	5/2	8/3			32/9
				3/2	27/16	15/8	2	9/4	5/2	45/16	3		
					5/8	15/8	25/12	20/9	5/2	25/9	25/8	10/3	
						15/8	135/64	75/32	5/2	45/16	25/8	225/64	15/4

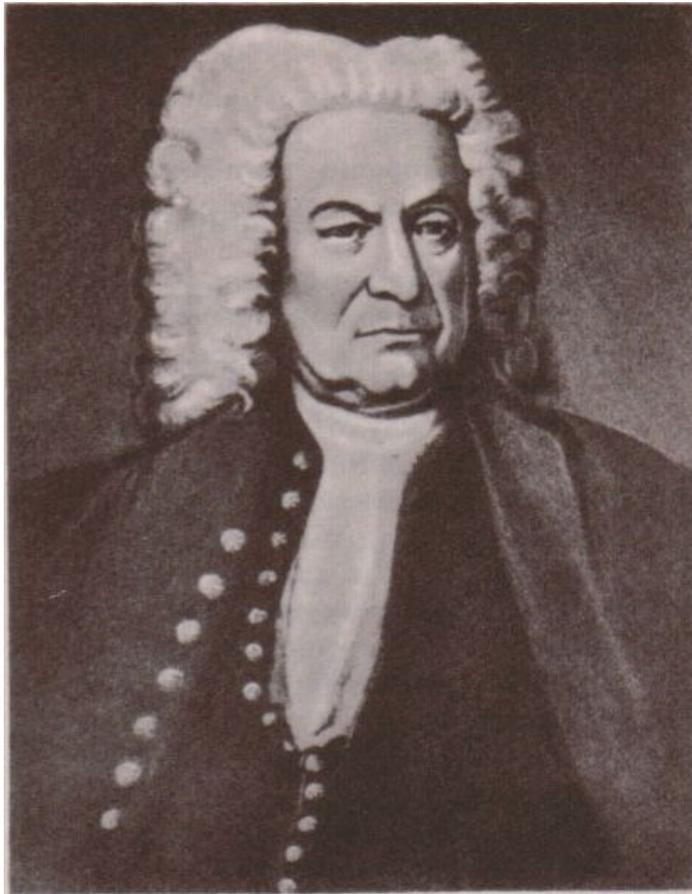
# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ

- Сейчас трудно сказать, кому первому пришла идея равномерно разделить октаву на 12 равных частей. Идея эта была подготовлена самой логикой развития музыкального строя и, как говорят в таких случаях, носилась в воздухе. Но изложение этой идеи мы находим в энциклопедическом труде Мерсенна «Универсальная гармония».

# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ

- Конечно, и в век Просвещения новое не всеми воспринималось восторженно. Выдающийся немецкий композитор Георг Фридрих Гендель не принял новшества. Отказ от совершенных консонансов возмущал его. К счастью, равномерная темперация нашла сторонника в лице сверстника Генделя, великого немецкого композитора и органиста Иоганна Себастьяна Баха.

# ИОГАНН СЕБАСТЬЯН БАХ 📢



# АЛГЕБРА ГАРМОНИИ - ТЕМПЕРАЦИЯ

- И все-таки является ли 12-звучовая равномерная темперация «абсолютной истиной» в музыке? Разумеется, нет! Спор Баха и Генделя продолжается. Музыкантов с особо тонким слухом раздражают «тупые» консонансы темперированного строя.
- Поиски новых равномерных темперации продолжаются. Разработаны 24-, 48- и 53-звучовые равномерные темперации. На каждую из них специально написана музыка и сконструированы музыкальные инструменты. Но все они практического распространения не получили.



П.И.Чайковский

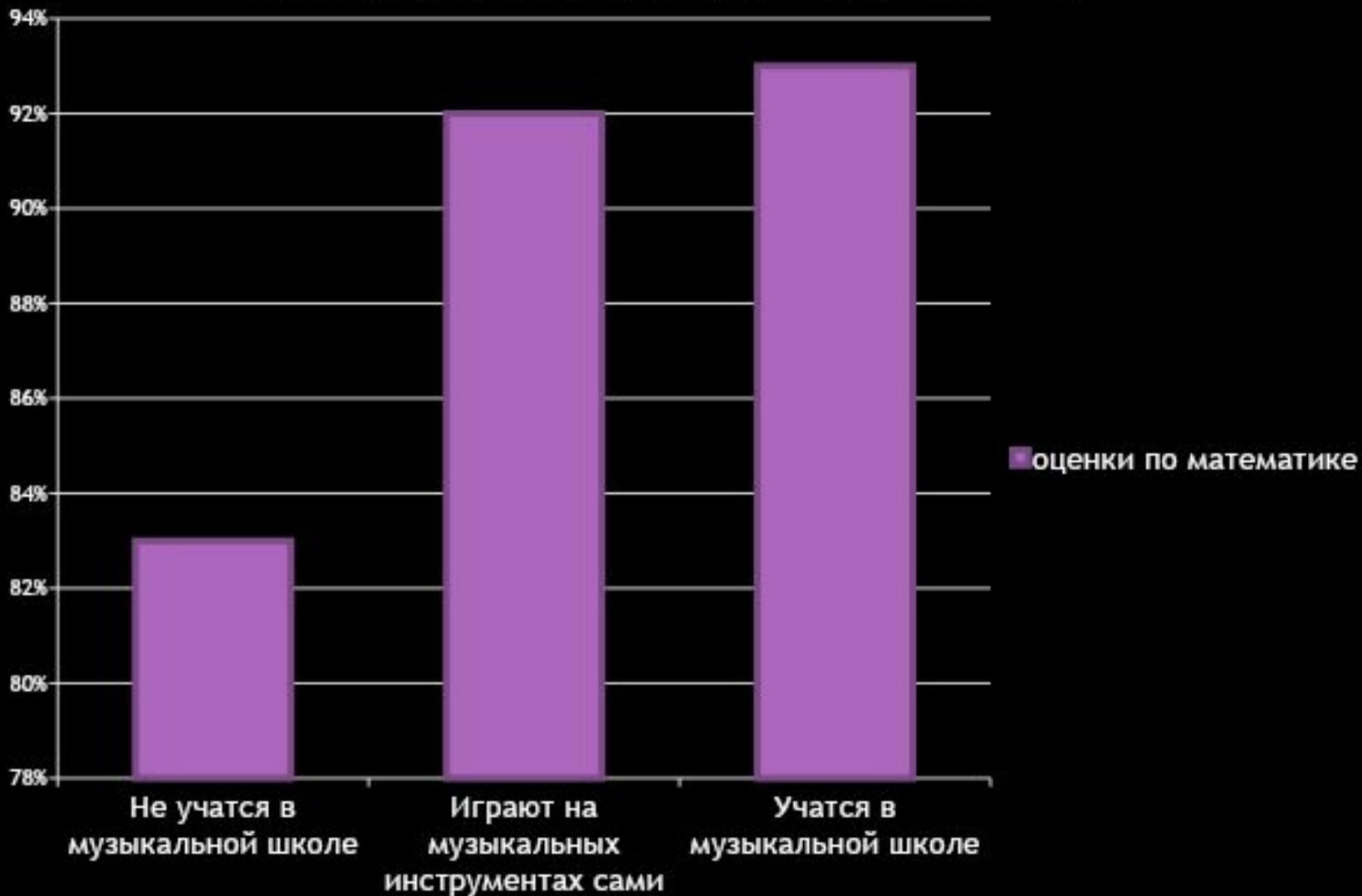


А.Н.Скрябин

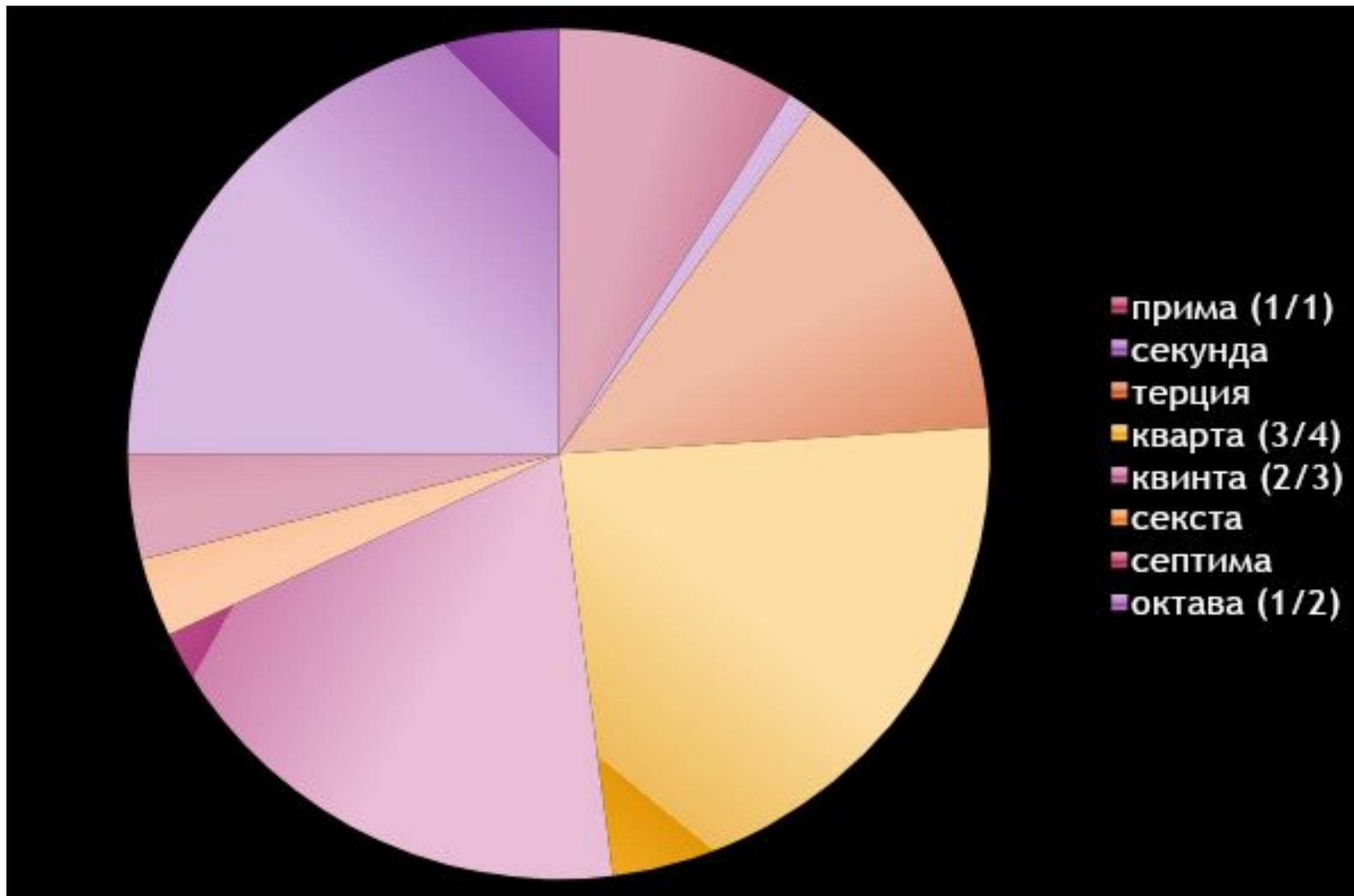


С.Рихтер

График зависимости оценок по математике от занятий музыкой.



# Диаграмма выбора интервалов учащимися

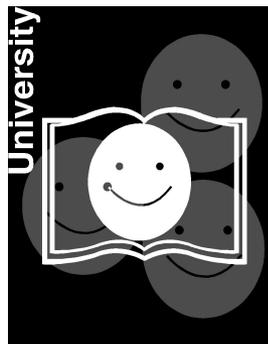


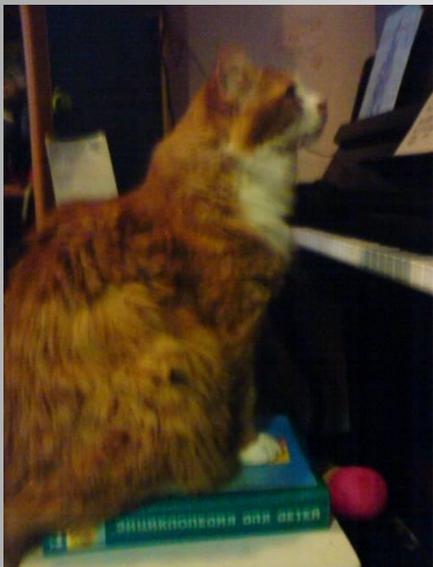
# ЗАКЛЮЧЕНИЕ



В ходе работы мы познакомились с пифагорейским учением о математике и музыке; на основе его разработали правила построения консонанса, доказали его математическую природу; с помощью исследования показали, что и сегодня пифагорейская теория консонансов может быть использована; убедились, что занятия музыкой благотворно влияют на математические способности учащихся. Таким образом, цель работы достигнута.

В нашем исследовании мы провели параллель между двумя, казалось бы несовместимыми науками: музыкой и математикой.





СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ!

