Математические софизмы

Работу выполнил:
ученик 10 МБ класса МОУ «Лицей №2»
Овсянников Илья
Научный руководитель:
Кузьменкова Наталья Яковлевна

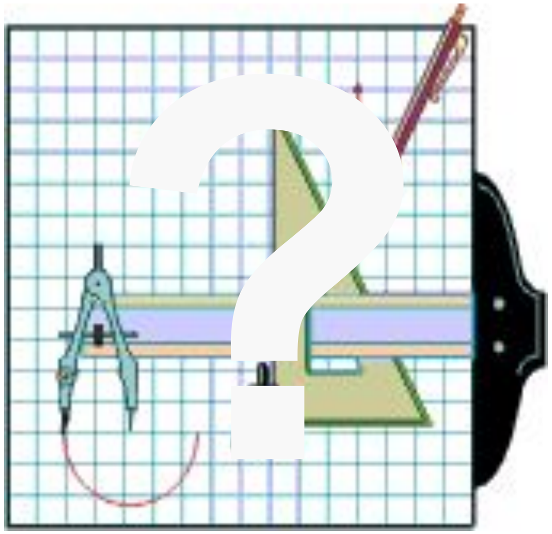
Что такое софизм?

Правильно понятая ошибка – это путь к открытию

И.П. Павлов

Софизм (от греч. *sophisma* – уловка, выдумка, головоломка), формально кажущееся правильным, но по существу ложное умозаключение, основанное на преднамеренно неправильном подборе исходных положений.

Каков бы ни был софизм, он обязательно содержит одну или несколько замаскированных ошибок. Особенно часто в математических софизмах выполняются «запрещённые» действия или не учитываются условия применимости теорем, формул и правил. Иногда рассуждения ведутся с использованием ошибочного чертежа или опираются на приводящие к ошибочным заключениям «очевидности». Встречаются софизмы, содержащие и другие ошибки.

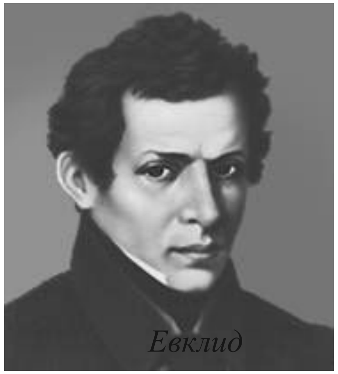


История софизмов

В истории развития математики софизмы играли существенную роль. Они способствовали повышению строгости математических рассуждений и содействовали более глубокому уяснению понятий и методов математики. Роль софизмов в развитии математики сходна с той ролью, какую играют непреднамеренные ошибки в математических исследованиях, допускаемые даже выдающимися математиками. Именно уяснение ошибок в математических рассуждениях часто содействовало развитию математики.

Пожалуй, особенно поучительна в этом отношении история аксиомы Евклида о параллельных прямых. Сформулировать эту аксиому можно так: через данную точку, лежащую вне данной прямой, можно провести не более одной прямой, параллельной данной (что одну прямую, параллельную данной, можно провести – это доказывается). Это утверждение на протяжении более чем двух тысяч лет пытались доказать, вывеси из остальных аксиом геометрии, но все попытки не увенчались успехом. Полученные «доказательства» оказались ошибочными. И всё же, несмотря на ошибочность этих «доказательств», они принесли большую пользу развитию геометрии. Можно сказать, что они подготовили одно из величайших достижений в области геометрии и всей математики – создание неевклидовой геометрии. Честь разработки новой геометрии принадлежит нашему великому соотечественнику Н.И. Лобачевскому и венгерскому математику Яношу Бойяи. Н.И. Лобачевский и сам сначала пытался доказать аксиому параллельных, но скоро понял, что этого сделать нельзя. И путь, идя которым Лобачевский убедился в этом, привёл его к созданию новой геометрии. Этот замечательный вклад в математику был одним из тех, которые прославили русскую науку.

Евклид



Н.И. Лобачевский

Чем полезны софизмы и что они дают?

Разбор софизмов прежде всего развивает логическое мышление, то есть прививает навыки правильного мышления. Обнаружить ошибку – это значит осознать её, а осознание ошибки предупреждает от повторения её в других математических рассуждениях. Что особенно важно, разбор софизмов помогает сознательному усвоению изучаемого материала, развивает наблюдательность, вдумчивость и критическое отношение к тому, что изучается. Математические софизмы приучают внимательно и настороженно продвигаться вперёд, тщательно следить за точностью формулировок, правильностью записей и чертежей, за допустимостью обобщений. Всё это нужно и важно.

Наконец, разбор софизмов увлекателен. Чем труднее софизм, тем

Виды математических софизмов

(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

- **Алгебраические софизмы**
- **Геометрические софизмы**

Алгебраические софизмы

Вот некоторые результаты решения софизмов:

(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

Пример 1. 1 р. = 10 000 к.

Пример 2. 5 = 6

Пример 3. 4 = 8

Пример 4. 2 · 2 = 5

Пример 5. 5 = 1

Пример 6. 4 = 5

Пример 7. Любое число равно его половине

Пример 8. Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска

Пример 9. Любое число = 0

Пример 10. Из двух неравных чисел первое всегда больше второго

Пример 1.
1 р. = 10 000 к.

Возьмём верное равенство:

1 р. = 100 к.

Возведём его по частям в квадрат.

Мы получим: 1 р. = 10 000 к.

****

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Возведение в квадрат величин не имеет смысла. В квадрат возводятся только числа.

Пример 2.
$5 = 6$

Попытаемся доказать, что 5 = 6. С этой целью возьмём числовое тождество:

$35 + 10 - 45 = 42 + 12 - 54$.

Вынесем общие множители левой и правой частей за скобки. Получим:

$5\,(7 + 2 - 9) = 6\,(7 + 2 - 9)$.

Разделим обе части этого равенства на общий множитель (заключённый в скобки).

Получаем $5 = 6$.

****

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Общий множитель $(7 + 2 - 9)$ равен 0, а делить на 0 нельзя.

Пример 3.
4 = 8

Возьмём систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - 2 = -\dfrac{y}{2}. \end{cases}$$

Решим её способом подстановки.
Получим:

$$x = \frac{4 - y}{2};$$

$4 - y + y = 8$, т.е. $4 = 8$.

****

<u>Вопрос:</u>

В чём здесь дело?

<u>Ответ (нажмите «Enter»):</u>

Уравнения данной системы несовместны.

Пример 4.
$2 \cdot 2 = 5$

Имеем числовое равенство (верное): $4 : 4 = 5 : 5$.
Вынесем за скобки в каждой части его общий множитель.
Получим: $4\,(1 : 1) = 5\,(1 : 1)$.
Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.
****

Вопрос:
Где здесь ошибка?
Ответ (нажмите «Enter»):
Ошибка допущена в вынесении общего множителя за скобки в левой и правой частях тождества $4 : 4 = 5 : 5$.

Пример 5.
5 = 1

Из чисел 5 и 1 по отдельности вычтем одно и то же число 3.
Получим числа 2 и – 2.
При возведении в квадрат этих чисел получаются равные числа 4 И 4. Значит, должны быть равны и исходные числа 5 и 1.
****

Вопрос:
В чём ошибка?
Ответ (нажмите «Enter»):
Из равенства квадратов двух чисел не следует, что сами эти числа равны.

Пример 6.

$4 = 5$

Имеем числовое равенство (верное):

$16 - 36 = 25 - 45$; $16 - 36 + 20{,}25 = 25 - 45 + 20{,}25$;

$(4 - 4{,}5)^2 = (5 - 4{,}5)^2$; $4 - 4{,}5 = 5 - 4{,}5$;

$4 = 5$.

****

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

$(4 - 4{,}5)^2 = (5 - 4{,}5)^2 \leftrightarrow |4 - 4{,}5| = |5 - 4{,}5|$.

Пример 7.
Любое число равно его половине

Возьмём два равных числа a и b, $a = b$. Обе части этого равенства умножим на a и затем вычтем из произведений по b^2. Получим:
$a^2 - b^2 = ab - b^2$, или $(a + b)(a - b) = b(a - b)$.
Отсюда $a + b = b$, или $a + a = a$, так как $b = a$.
Значит, $2a = a$, $a = \frac{a}{2}$.

****

Вопрос:
В чём ошибка?
Ответ (нажмите «Enter»):

Нельзя делить на $(a - b)$, так как $(a - b) = 0$.

Пример 8.
Расстояние от Земли до Солнца равно толщине волоска

Пусть a (м) – расстояние от Земли до Солнца, а b (м) – толщина волоска. Среднее арифметическое их обозначим через v. Имеем: $a + b = 2v$, $a = 2v - b$, $a - 2v = - b$. Перемножив по частям два последних равенства, получаем:

$a^2 - 2av = b^2 - 2bv$. Прибавим к каждой части v^2. Получим:

$a^2 - 2av + v^2 = b^2 - 2bv + v^2$, или $(a - v)^2 = (b - v)^2$, т.е.

$(a - v) = (b - v)$, и, значит, $a = b$.

****

Вопрос:

Где здесь ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибка как в примере №6.

Пример 9.
Любое число = 0

Каково бы ни было число a, верны равенства:
$(+a)^2 = a^2$ и $(-a)^2 = a^2$. Следовательно, $(+a)^2 = (-a)^2$, а значит, $+a = -a$, или $2a = 0$, и поэтому $a = 0$.
****

Вопрос:
В чём ошибка?
Ответ (нажмите «Enter»):
Ошибка как в примере №6.

Пример 10.

Из двух неравных чисел первое всегда больше второго

Пусть a и b – произвольные числа и $a \neq b$. Имеем:

$(a - b)^2 > 0$, т.е. $a^2 - 2ab - b^2 > 0$, или $a^2 + b^2 > 2ab$.

К обеим частям этого неравенства прибавим $-2b^2$. Получим:

$a^2 - b^2 > 2ab - 2b^2$, или $(a + b)(a - b) > 2b(a - b)$.

После деления обеих частей на $(a - b)$ имеем:

$a + b > 2b$, откуда следует, что $a > b$.

****

<u>Вопрос:</u>

Где допущена ошибка?

<u>Ответ (нажмите «Enter»):</u>

При делении обеих частей неравенства $(a + b)(a - b) > 2b(a - b)$ на $(a - b)$ знак неравенства может измениться на противоположный (если $a - b < 0$).

Геометрические софизмы

Вот некоторые примеры геометрических софизмов:

(для подробного просмотра нажмите на выбранную строку)

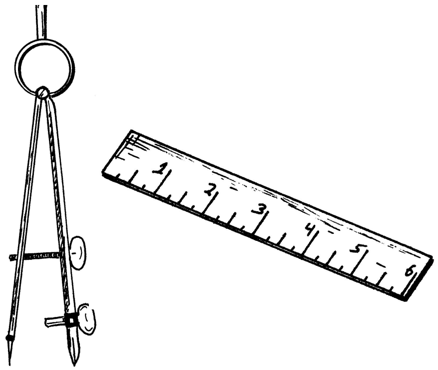
Пример 1. Загадочное исчезновение.

Пример 2. Земля и апельсин

Пример 3. Искусная починка

Пример 4. Два перпендикуляра

Пример 5. «Новое доказательство» теоремы Пифагора



Пример 1.
Загадочное исчезновение

У нас есть произвольный прямоугольник, на котором начерчено 13 одинаковых линий на равном расстоянии друг от друга, так, как показано на рисунке 1.

Рис. 1

Теперь «разрежем» прямоугольник прямой **MN**, проходящей через верхний конец первой и нижний конец последней линии. Сдвигаем обе половины вдоль по этой линии и замечаем, что линий вместо 13 стало 12. Одна линия исчезла бесследно.

****

Вопрос:

Куда исчезла 13-я линия?

Ответ (нажмите «Enter»):

13-я линия удлинила каждую из оставшихся на 1/12 своей длины .

Пример 2.
Земля и апельсин

Вообразим, что земной шар обтянут по экватору обручем и что подобным же образом обтянут и апельсин по его большому кругу. Далее вообразим, что окружность каждого обруча удлинилась на 1м. Тогда обручи отстанут от поверхности тел и образуют некоторый зазор

****

Вопрос:

Где зазор будет больше: у апельсина или у Земли?

Ответ (нажмите «Enter»):

Пусть длина окружности земного шара = C, а апельсина c метрам. Тогда радиус Земли $R = C/2\pi$ и радиус апельсина $r = c/2\pi$. После прибавки к радиусам 1 метра окружность обруча у Земли будет $C + 1$, а у апельсина $c + 1$. Радиусы их соответственно будут: $(C + 1)/2\pi$ и $(c + 1)/2\pi$. Если из новых радиусов вычтем прежние, то получим в обоих случаях одно и то же.

$(C + 1)/2\pi - C/2\pi = 1/2\pi$ - для Земли,

$(c + 1)/2\pi - c/2\pi = 1/2\pi$ - для апельсина

Итак, у Земли и у апельсина получается один и тот же зазор в $1/2\pi$ метра (примерно 16 см).

Пример 3.
Искусная починка

В дне деревянного судна во время плавания случилась прямоугольная пробоина в 13 см длины и 5 см ширины, т.е. площадь пробоины = 65 см^2. Судовой плотник взял квадратную дощечку со стороной квадрата 8 см (т.е. площадь = 64 см^2), разрезал её прямыми линиями на четыре части A, B, C, D так, как показано на рисунке 2, а затем сложил их так, что получился прямоугольник, как раз соответствующий пробоине, см. рисунок 3. Этим прямоугольником он и заделал пробоину. Вышло, что плотник сумел квадрат в 64 см^2 обратить в прямоугольник с площадью 65 см^2.

****

Вопрос:

Как такое могло получиться?

Ответ (нажмите «Enter»):

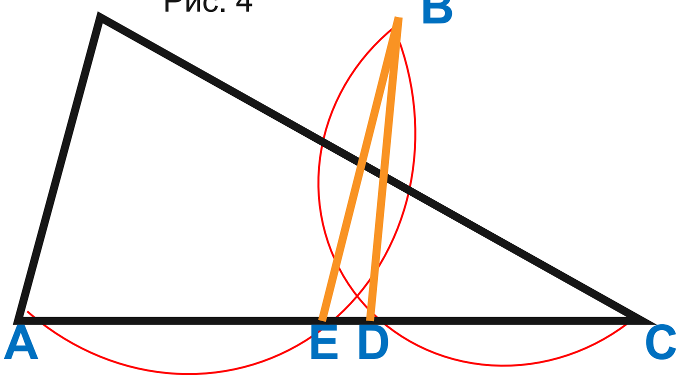
Легко видеть, что получившиеся при разрезании квадрата треугольники A и B равны между собой. Также равны и трапеции C, D. Меньшее основание трапеций и меньший катет треугольников равны 3 см и поэтому должны совпасть при совмещении треугольника A с трапецией C и треугольника B с трапецией D. В чём же секрет? Дело в том, что точки G, H, E не лежат на одной прямой, tg ∠ EHK = 8/3 , а tg ∠ HGJ = 5/2. Так как 8/3 – 5/2 = 1/6 > 0, то ∠ EHK > ∠ HGJ. Точно так же линия EFG – ломанная. Площадь полученного прямоугольника действительно равна 65 см^2, но в нём имеется щель в виде параллелограмма, площадь которого в точности равна 1 см^2. Наибольшая ширина щели равна 5 – 3 – (5·3)/8 = 1/8 см. Таким образом плотнику всё равно придётся замазывать небольшую щель.

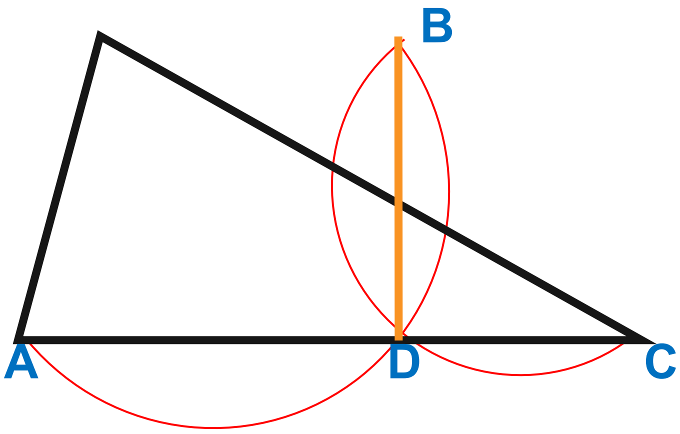
Пример 4.
Два перпендикуляра

Попытаемся «доказать», что через точку, лежащую вне прямой, к этой прямой можно провести два перпендикуляра. С этой целью возьмём треугольник ABC (рисунок 4). На сторонах AB и BC этого треугольника, как на диаметрах, построим полуокружности. Пусть эти полуокружности пересекаются со стороной AC в точках E и D. Соединим точки E и D прямыми с точкой B. Угол AEB прямой, как вписанный, опирающийся на диаметр; угол BDC также прямой. Следовательно, BE ⊥ AC и BD ⊥ AC. Через точку B проходят два перпендикуляра к прямой AC.

****

Рис. 4





<u>Вопрос:</u>

В чём ошибка?

<u>Ответ (нажмите «Enter»):</u>

Рассуждения опирались на ошибочный чертёж. В действительности полуокружности пересекаются со стороной AC в одной точке, т.е. BE совпадает с BD.

Пример 5.
«Новое доказательство» теоремы Пифагора

Возьмём прямоугольный треугольник с катетами a и b, гипотенузой c и острым углом α, противолежащим катету a.

Имеем: $a = c \sin \alpha$, $b = c \cos \alpha$, откуда $a^2 = c^2 \sin^2 \alpha$, $b^2 = c^2 \cos^2 \alpha$.

Просуммировав по частям эти равенства, получаем:

$a^2 + b^2 = c^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$.

Но $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, и поэтому $a^2 + b^2 = c^2$.

****

Вопрос:

В чём ошибка?

Ответ (нажмите «Enter»):

Ошибки здесь нет. Но формула $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ сама выводится на основании теоремы Пифагора.

[литература]

1. «Аванта +. Математика». – Москва, изд. «Аванта +»,1998.
2. «БЭКМ – 2007». – Москва, 2007.
3. Игнатьев Е.И. «Математическая смекалка. Занимательные задачи, игры, фокусы, парадоксы». – Москва, изд. «Омега»,1994.
4. Нагибин Ф.Ф., Канин Е.С. «Математическая шкатулка». – Москва, изд. «Просвещение»,1988.