

Введение в математическую логику

Содержание

1. Понятие логики
2. История логики
3. Цели и задачи логики
4. Формальная логика
5. Основные понятия логики
6. Логические законы
7. Простой категорический силлогизм
8. Аналогия
9. Доказательство
10. Высказывания
11. Логические операции
- 12.** Математическая логика.

Понятие логики

Логика (др.-греч. λογική — «наука о правильном мышлении», «искусство рассуждения» от λόγος — «речь») — наука о формах, методах и законах интеллектуальной познавательной деятельности, формализуемых с помощью логического языка.



История логики

Древняя Греция

Индия

Китай

Начало истории логики

«Органон» Аристотеля
– первые труды по
формальной логике

Развитие логики Аристотеля
исламскими логиками

Развитие и подъем
средневековой
европейской логики до XIV

Схоластическая логика.
Представители:
Уильям Оккама,
Альберт Саксонский и
Уолтер Берли.

Конец XIX – нач. XX вв. –
заложены основы
математической
(символической) логики

Приминение
математических методов
для обнаружения
истинного значения
выражений естественного
языка

Дж. Буль,
О. де
Морган,
Г. Фреге, Ч.
Пирс
Внесли
огромный
вклад в
развитие
символической

кой

Цели и задачи логики

Основная цель (функция) логики - исследование того, как из одних утверждений можно выводить другие.

При этом предполагается, что вывод зависит только от **способа связи** входящих в него утверждений и их строения, а не от их конкретного содержания.

Изучая, «что из чего следует», логика выявляет наиболее общие, **формальные** условия правильного мышления.

Одна из главных задач логики — определить, как прийти к **выводу из предпосылок** (правильное рассуждение) и получить истинное знание о предмете размышления.

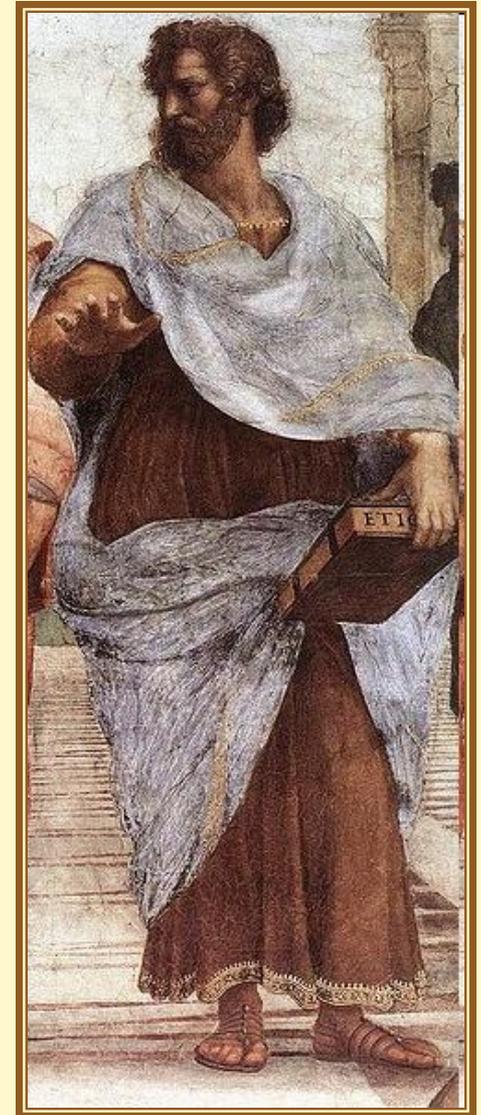
Логика служит одним из инструментов почти любой науки

Формальная логика

Формальная логика — конструирование и исследование правил преобразования высказываний, сохраняющих их истинностное значение безотносительно к содержанию входящих в эти высказывания понятий.

Основоположником формальной логики является **Аристотель**, чьи труды о логике в дальнейшем стали основой данного течения.

В истории философии — отдельный раздел или направление логики конца XIX—начала XX века.



Основные понятия логики

- **Высказывание** (суждение) – некоторое предложение, которое может быть истинно (верно) или ложно.
- **Утверждение** – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть.
- **Рассуждение** – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом.
- **Умозаключение** – логическая операция, в результате которой из одного или нескольких данных суждений получается (выводится) новое суждение.
- **Логическое выражение** – запись или устное утверждение, в которое, наряду с постоянными, обязательно входят переменные величины (объекты). В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Логические законы

- **Закон противоречия** — «не противоречь сам себе». Два несовместимых суждения не могут быть одновременно истинными.
- **Закон исключенного третьего** — «А или не-А истинно, третьего не дано». Два противоположных суждения не могут быть одновременно ложными (либо истинными), одно из них необходимо истинно (либо ложно).
- **Закон тождества** — «Если А, то А, или $A \equiv A$ ». Предмет суждения должен оставаться тождественным самому себе в этом суждении.

Законы логики учитываются во всех логических операциях. Также они находят свое отражение в простом категорическом силлогизме.

Простой категорический силлогизм (греч. συλλογισμός) — рассуждение, состоящее из трёх простых атрибутивных высказываний: **двух посылок** и одного **заключения**.

Посылки силлогизма разделяются на **большую** (которая содержит предикат заключения) и **меньшую** (которая содержит субъект заключения).

Простой категорический силлогизм

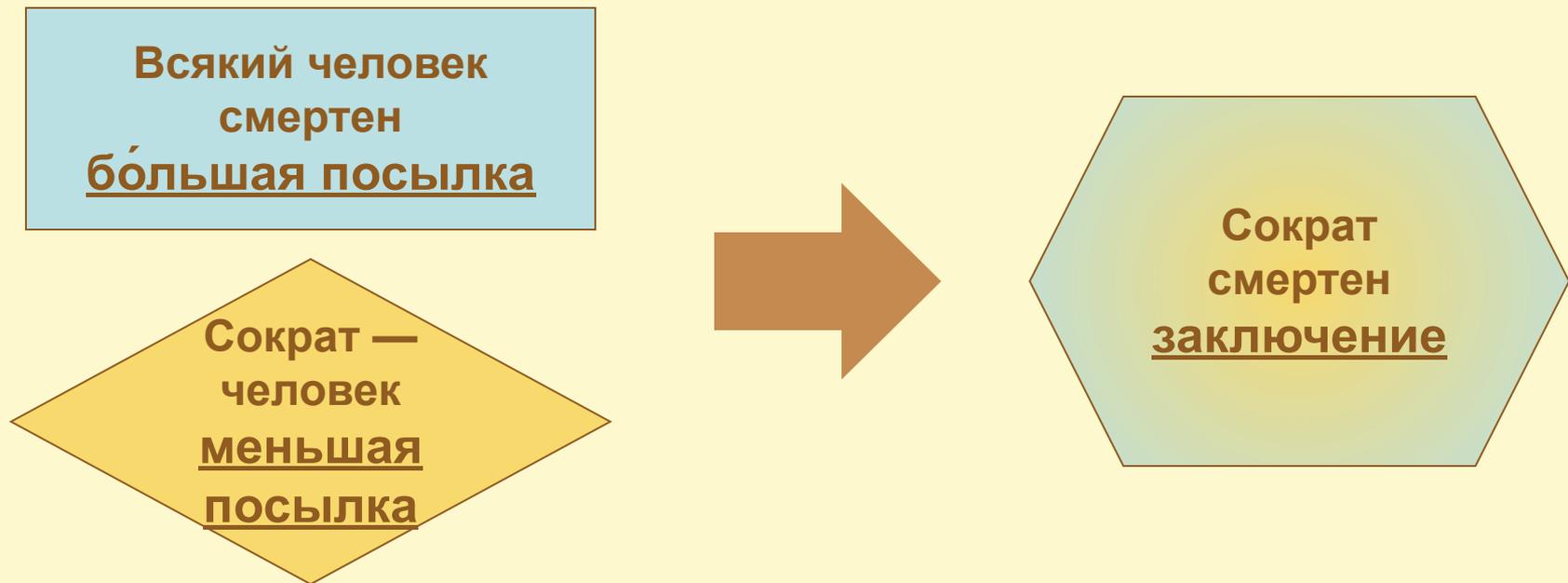
В силлогизм входит три термина:

S — **меньший термин**: субъект заключения (входит также в меньшую посылку);

P — **большой термин**: предикат заключения (входит также в большую посылку);

M — **средний термин**: входит в обе посылки, но не входит в заключение.

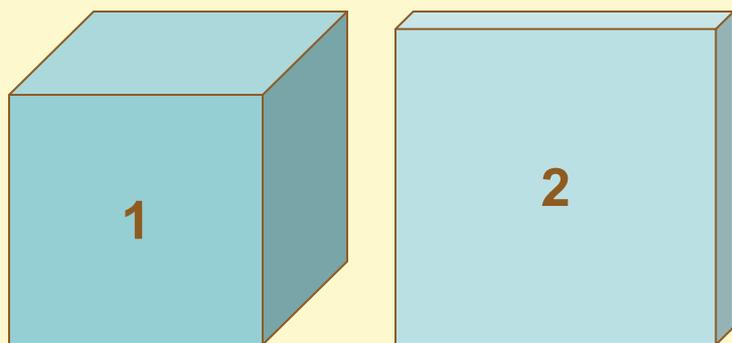
Пример силлогизма:



Аналогия

Анало́гия (др.-греч. ἀναλογία — соответствие, сходство) — подобие, равенство отношений; сходство предметов (явлений, процессов) в каких-либо свойствах, а также **познание путём сравнения**.

Между сравниваемыми вещами должно иметься как различие, так и подобие; то, что является основой сравнения, должно быть более знакомым, чем то, что подлежит сравнению.



П
р
и
м
е
р
:
Д

Модель аналогии (лат. modus — образец, копия, образ) — предметная, математическая или абстрактная система, имитирующая или отображающая принципы внутренней организации, функционирования, особенностей исследуемого объекта (оригинала), непосредственное изучение, которого, по разным причинам, невозможно или усложнено.

Доказательство

Доказательство — это совокупность логических приемов обоснования истинности какого-либо суждения с помощью других истинных и связанных с ним суждений.

Структура доказательства:

Тезис — утверждение, истинность которого надо доказать

Аргументы и факты — это те истинные суждения, которыми пользуются при доказательстве тезиса

Демонстрация (форма доказательства) — способ обоснованной логической связи между утверждаемым тезисом и аргументами

Виды доказательств

Прямое
(истинность обосновывается
непосредственно аргументами)

Косвенное
(доказывается ложность
утверждаемого антитезиса)

Апагогическое
(доказательство от
«противного»)

Разделительное доказательство
(методом исключения)

Высказывания

Высказыванием является повествовательное предложение, которое формализует некоторое выражение мысли.

Это утверждение, которому всегда можно поставить в соответствие одно из двух логических значений: истина или ложь.

Высказывательной формой называется логическое высказывание, в котором один из объектов заменён переменной.

При подстановке вместо переменной какого-либо значения высказывательная форма превращается в высказывание.

Пример:

$A(x) =$ «В городе x идет дождь.»

A — высказывательная форма, x — объект.

Виды
высказываний

Элементарные

Составные

образованы из простых
высказываний с
помощью логических
связок (операций).

Логические операции

Основные операции над логическими высказываниями:

Дизъюнкция двух логических высказываний — логическое высказывание, истинное только тогда, когда хотя бы одно из них истинно.

Дизъюнкция определяет соединение двух логических выражений с помощью союза ИЛИ

A	B	F
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Конъюнкция двух логических высказываний — логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны.

Конъюнкция определяет соединение двух логических выражений с помощью союза И.

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Логические операции

Отрицание логического высказывания — логическое высказывание, принимающее значение «истинно», если исходное высказывание ложно, и наоборот.

Данная операция означает, что к исходному логическому выражению добавляется частица НЕ или слова НЕВЕРНО, ЧТО.

A	неA
1	0
0	1

Импликация двух логических высказываний A и B — логическое высказывание, ложное только тогда, когда B ложно, а A истинно.

Обозначается символом "следовательно" и выражается словами ЕСЛИ ... , ТО ...

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Равносильность (эквивалентность) двух логических высказываний — логическое высказывание, истинное только тогда, когда они одновременно истинны или ложны.

A	B	F
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Предмет изучения математической логики весьма необычен – это математические рассуждения, доказательства и теории.

Здесь важно отметить, что математика – наука дедуктивная (от лат. *deductio* – «выведение»). Это означает, что основным методом обоснования знаний в математике является выведение одних утверждений из других. Причем это выведение происходит по четким правилам, обеспечивающим достоверность выводов при условии, что исходные утверждения были достоверными. Справедливыми в математике признают только те утверждения, которые обоснованы с помощью дедуктивных рассуждений. Дедуктивные рассуждения в математике выстраивают в доказательства в рамках соответствующих математических теорий. Таким образом, именно математические доказательства и математические теории являются предметом изучения математической логики, точнее, ее основного раздела – теории доказательств. Поскольку математическая логика – это область математики, то она пользуется математическими средствами и методами.

Математическая логика изучает математические рассуждения, пользуясь математическими методами.

Основным методом математической логики является метод формализации, имеющий решающее значение в развитии математической логики. Сущность этого метода заключается в следующем.

Все математические предложения записывают на специальном (формальном) логическом языке в виде формул. С помощью этого же языка точно выражают используемые в математических рассуждениях логические правила. В результате всякое математическое доказательство в неформальной аксиоматической теории превращается в упорядоченную систему формул, построенную по четко описанным правилам, – формальный вывод в формальной теории, становясь при этом точно описанным математическим объектом.

История возникновения математической логики.

Создателем формальной логики был древнегреческий мыслитель Аристотель (384–322 до н. э.). Его учение неизменно лежало в основе изучения логики более двух тысячелетий. Новым этапом ее развития стало использование символического языка для записи предложений (XIX в., Джордж Буль). Однако математическая логика как наука возникла только в XX веке. Огромную роль в ее становлении и развитии сыграл крупнейший немецкий математик Давид Гильберт (1862–1943), использовавший метод формализации для изучения математических теорий с целью доказательства их непротиворечивости.

Наконец, возникает еще один вопрос: зачем нужно изучать математические рассуждения? Действительно, математика многие века достаточно успешно развивалась без их специального изучения, без математической логики. Чем это было вызвано? Возникновению математической логики способствовали следующие обстоятельства. В конце XIX века Георг Кантор (1845–1918) создал теорию множеств. Эта теория была принята математиками как универсальный фундамент всей математической науки и явилась важнейшим инструментом ее дальнейшего развития (прежде всего, развития математического анализа).

Однако в начале XX века математика была потрясена открытием противоречий в канторовой теории множеств, так называемых парадоксов. Открытие парадоксов ознаменовало начало кризиса в основаниях математики на рубеже XIX–XX веков. С открытием парадоксов появилась необходимость уточнения и специального изучения логических средств, используемых в математических доказательствах, что привело к возникновению математической логики и способствовало ее дальнейшему развитию.

Математическая логика продолжает развиваться и в настоящее время. Результаты современных исследований в некоторых областях математической логики находят все большее применение в кибернетике и информатике (в computer science).

Глава 1.

§ 1.1. Высказывания и операции над ними

Алгебра высказываний – раздел математической логики, в котором изучаются операции над высказываниями.

Под высказыванием будем понимать повествовательное предложение, которое однозначно характеризуется как истинное или ложное.

Таким образом, каждое высказывание имеет только одно из двух значений – истина или ложь. Для их обозначения будем использовать буквы «И», «Л» соответственно, а сами значения называть истинностными значениями.

Рассмотрим следующие предложения:

- 1) все студенты математических факультетов педвузов должны изучать математическую логику;
- 2) $7 \times 7 = 47$;
- 3) $7 \times 7 = ?$ (Чему равно 7×7 ?);
- 4) $7 \times x = 21$.

Первое из предложений является истинным высказыванием, поскольку математическая логика входит в учебные планы мате-матических факультетов педвузов. Второе предложение является ложным высказыванием. Третье предложение является вопросительным и поэтому не является высказыванием. Наконец, четвертое предложение содержит переменную, и про него нет смысла говорить, что оно истинно или ложно. Поэтому оно также не является высказыванием. Произвольные высказывания будем обозначать буквами А, В, С и т. д. Из одних высказываний с помощью логических операций можно образовывать другие, более сложные высказывания, истинностные значения которых полностью определяются значениями исходных высказываний.

Введем основные логические операции над высказываниями.

Конъюнкцией высказываний A и B называют высказывание « A и B ». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания A и B . (От лат. *conjunctio* - «соединение, союз, связь», $A \wedge B$).

Дизъюнкцией высказываний A и B называют высказывание « A или B ». Его считают истинным тогда и только тогда, когда истинно по крайней мере одно из высказываний A и B . (От лат. *disjunctio* - «разъединение, разобщение». $A \vee B$)

Отметим, что союз или в дизъюнкции высказываний носит не взаимоисключающий характер

Импликацией высказываний A и B называют высказывание «Если A , то B ». Его считают ложным тогда и только тогда, когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. При этом высказывание A называют посылкой, а B – заключением. Обозначают импликацию «Если A , то B » так: $A \rightarrow B$. (От лат. *implicare* - «тесно связывать»)

Отрицанием высказывания A называют высказывание «Неверно, что A (не A)». Это высказывание считают истинным тогда и только тогда, когда высказывание A ложно . $\neg A$

Операция эквиваленции $A \sim B$ определяется так: $A \sim B$ истинно т. и т. т., когда A и B или оба истинны или оба ложны.

Часто для обозначения операций над высказываниями используют символы

\wedge (&), \vee , \neg , \rightarrow , \sim (\leftrightarrow)

Примеры:

1. «2 - простое число, и 2 - четное число» - истинное высказывание, как конъюнкция двух истинных высказываний.
2. «2 - простое число, или 2 - четное число» - истинное высказывание, как дизъюнкция двух истинных высказываний.
3. «2 меньше 3, или 2 равно 3» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным первым членом.
4. «2 меньше 2, или 2 равно 2» - истинное высказывание, как дизъюнкция с истинным вторым членом.
5. «Если 2 - простое число, то 2 - четное число» - истинное высказывание, как импликация, посылка и заключение которой - истинные высказывания.
6. «Неверно, что 2 - простое число» - ложное высказывание, как отрицание истинного высказывания.