



# Алгебра

## Логарифмы

# План:

- *Определение.*
- *Свойства.*
- *Десятичные и натуральные логарифмы.*
- *Логарифмическая функция, ее свойства и график.*
- *Решение логарифмических уравнений и неравенств.*



# Определение логарифма:

- Логарифмом положительного числа  $b$  по основанию  $a$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , называется показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $b$ .
- Основное логарифмическое тождество:  
 $a^{\log_a b} = b$ , где  $b > 0$ ,  $a > 0$
- Действие нахождения логарифма называется *логарифмированием*.

# *Свойства логарифмов:*

- $\text{Log}_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- $\text{Log}_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
- $\text{Log}_a b^r = r \log_a b$
- $\text{Log}_a b = \log_c b / \log_c a$
- $\text{Log}_a b = 1 / \log_b a$
- $a^{\log bc} = c^{\log ba}$
- $\text{Log}_{a^r} b = 1/r \log_a b$
- $a^{\log ab} = b$

# Десятичные и натуральные логарифмы:

- *Десятичным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию 10. Записывается  $\lg b$
- *Натуральным логарифмом числа* называют логарифм этого числа по основанию  $e$ , где  $e$ -иррациональное число, приближенно равное 2,7. При этом записывается  $\ln b$



# Логарифмическая функция.

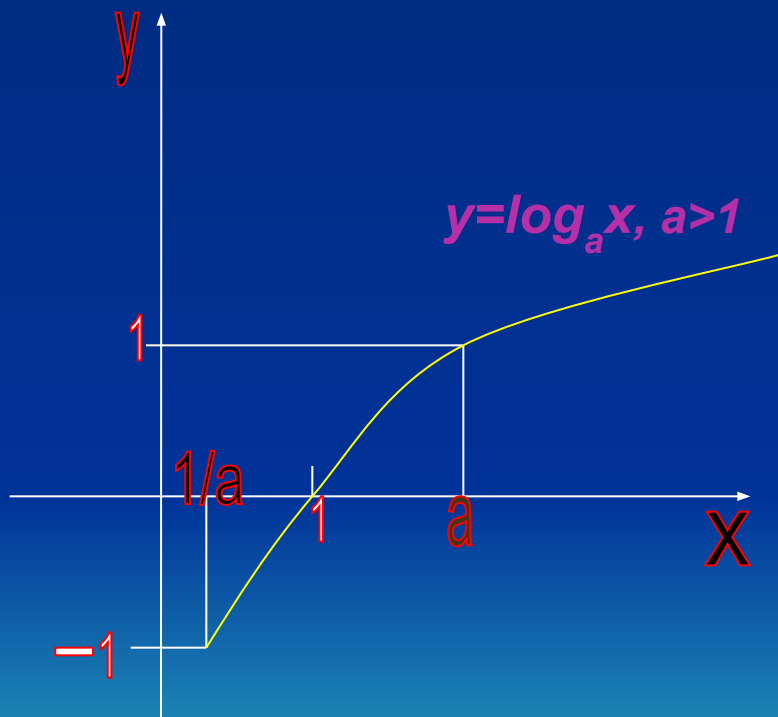
- **Логарифмическая функция:  $y = \log_a x$**

## **Свойства:**

1. Множество значений логарифмической функции - множество всех положительных чисел
2. Множество значений логарифмической функции - множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.
3. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  является возрастающей на промежутке  $x > 0$ , если  $a > 1$ , и убывающей, если  $0 < a < 1$
4. Если  $a > 1$ , то функция  $y = \log_a x$  принимает положительные значения при  $x > 1$ , отрицательные при  $0 < x < 1$ . Если  $0 < a < 1$ , то функция  $y = \log_a x$  принимает положительные значения при  $0 < x < 1$ , отрицательные при  $x > 1$ .
5. Логарифмическая функция  $y = \log_a x$  и показательная функция  $y = a^x$ , где  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , взаимно обратны.



# Логарифмическая функция и её график:



# Логарифмические уравнения

*Решить уравнение:*

$$\text{Log}_2(x+1) + \text{Log}_2(x+3) = 3$$

Решение:

Используя свойство логарифма, получаем:

$$\text{Log}_2(x+1)(x+3) = 3$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем:

$$(x+1)(x+3) = 8.$$

Теперь раскроем скобки и решим квадратное уравнение  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5$

При  $x_2 = -5$  числа  $(x+1)$  и  $(x+3) < 0$ , следовательно  $x = -5$  не является корнем уравнения.

Ответ.  $x = 1$





# Решение систем:

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1, \\ 4y^2 + x - 12 = 0. \end{cases}$$

Решение:

Из первого уравнения выразим  $x$  через  $y$ :  
 $\log_2 x / y = \log_2 2$ ,  $x / y = 2$ ,  $x = 2y$ . Подставив  $x = 2y$  во второе уравнение системы, получим  $4y^2 + 2y - 12 = 0$ , откуда  $y_1 = 3/2$ ,  $y_2 = -2$ . Найдем значения  $x$ :  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = -4$ . Проверка показывает, что  $-4$  и  $-2$  – постороннее решение.

Ответ.  $x = 3$ ,  $y = 3/2$ .

# Логарифмические неравенства:

- Решить неравенство:

$$\log_2(x-3) + \log_2(x-2) \leq 1$$

Решение:

О.о.  $x > 3$ .

Используя свойства логарифма, получаем:

$\log_2(x-3)(x-2) \leq \log_2 2$ . Логарифмическая функция с основанием 2 является возрастающей, поэтому при  $x > 3$  неравенство  $\log_2(x-3)(x-2) \leq \log_2 2$  выполняется при  $(x-3)(x-2) \leq 2$ . Это неравенство можно записать в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)(x-2) \leq 2 \\ x > 3 \end{cases}$$



Лавенюкова