

Показательная & логарифмическая функции

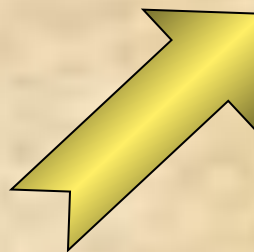
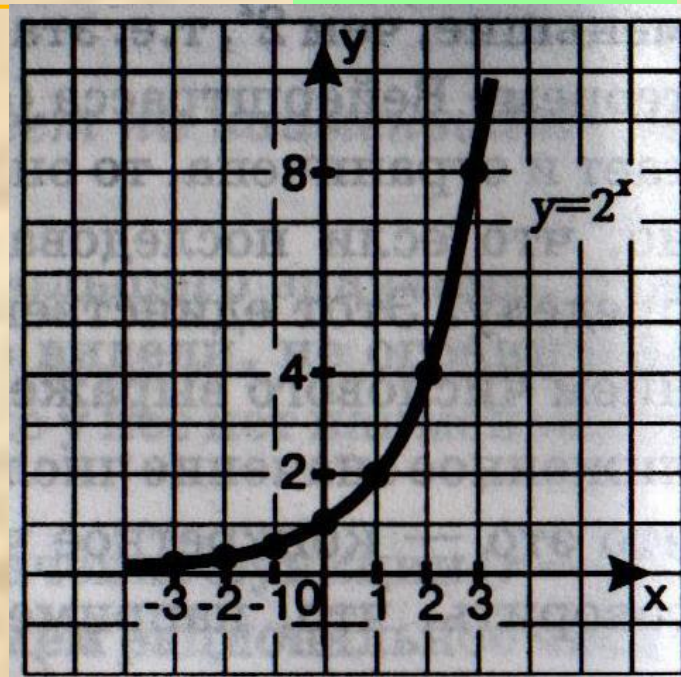
Рассмотрим выражение 2^x и найдём его значения при различных значениях переменных x .

Например: $x=2$, $x=5$.

если $x=2$, то $2^x = 2^2 = 4$;

если $x=5$, то $2^x = 2^5 = 32$;

Поскольку у функции $y = 2^x$ аргумент x содержится в показателе степени, её называют показательной функцией.

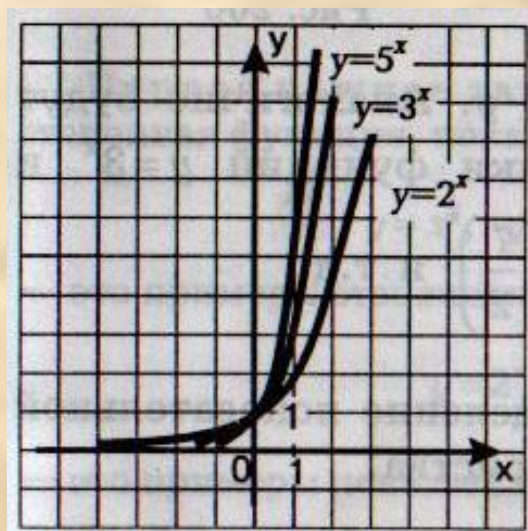


Свойства показательной функции

- $D(f) = (-\infty, +\infty)$;
- не является ни четной, ни нечетной;
- возрастает;
- не ограничена сверху, ограничена снизу;
- не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
- непрерывна;
- $E(f) = (0, +\infty)$;
- выпукла вниз.

Аналогичными свойствами обладает
любая функция вида

$y=a^x$, где $a>1$. На рис. В одной системе
координат построены графики функций $y = 2^x, y = 3^x, y = 5^x$.



Определение. Функцию вида $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$, называют показательной функцией.

Основные свойства показательной функции $y=a^x$

№ п/п	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(f) = (-\infty, +\infty)$	$D(f) = (-\infty, +\infty)$
2	$E(f) = (0, +\infty)$	$E(f) = (0, +\infty)$
3	Возрастает	Убывает
4	Непрерывна	Непрерывна

График функции $y=a^x$ для $a>1$ изображен на рис. 1, а для $0<a<1$ – на рис. 2.

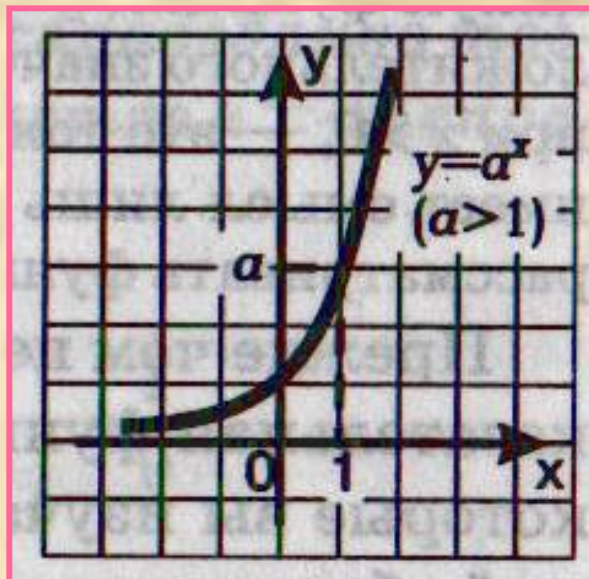


Рис.1

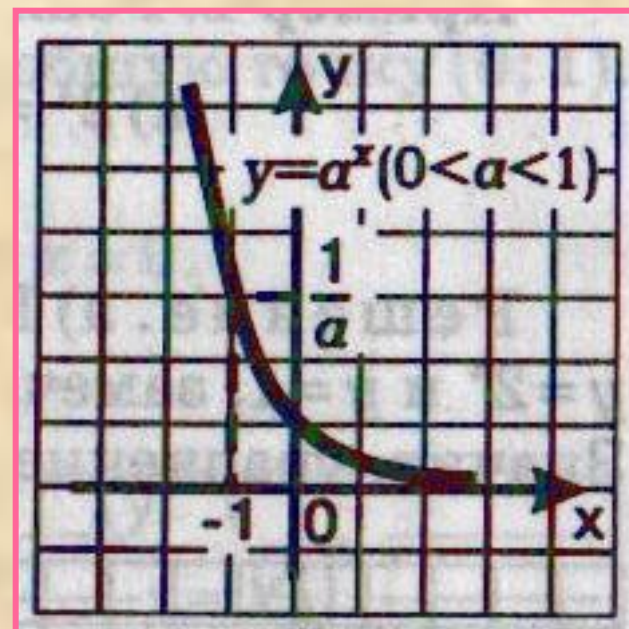


Рис. 2

Теорема 1. Если $a > 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 2. Если $a > 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$ (рис. 3), неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$.

Теорема 3. Если $0 < a < 1$, то равенство $a^t = a^s$ справедливо тогда и только тогда, когда $t = s$.

Теорема 4. Если $0 < a < 1$, то неравенство $a^x > 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x < 0$ (рис. 4); неравенство $a^x < 1$ справедливо тогда и только тогда, когда $x > 0$.

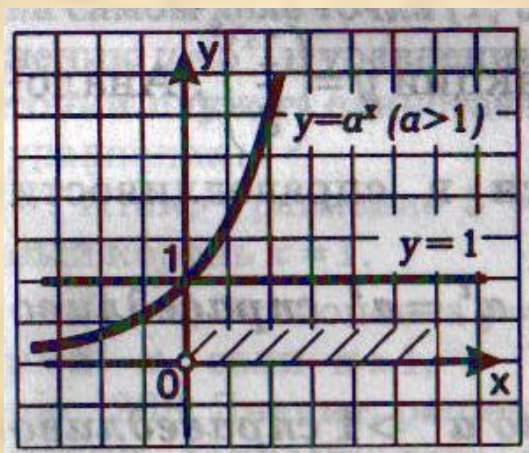


Рис.3

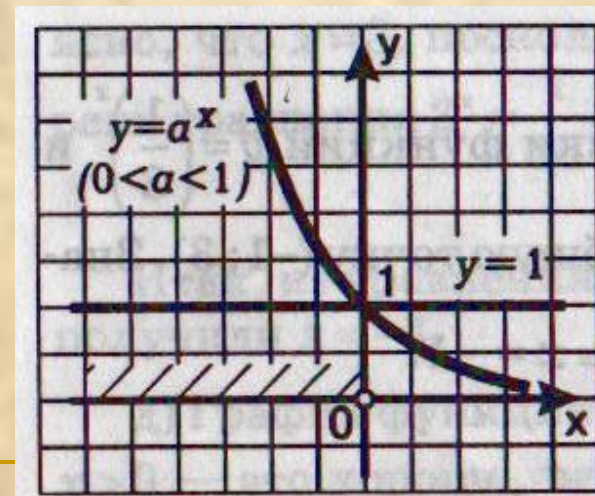


Рис.4

Определение. Логарифмом положительного числа b по положительному и отличному от единицы основанию a называют показатель степени, в которую нужно возвести число a , чтобы получить число b .

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a^c = c$$

Логарифмическая функция

Рассмотрим одновременно две функции: показательную $y=a^x$ и логарифмическую $y=\log_a x$.

Пусть точка (b,c) принадлежит графику функции $y=a^x$; это значит, что справедливо равенство $c=a^b$. Перепишем это равенство «на языке логарифмов»: $b=\log_a c$. Последнее равенство означает, что точка (c,b) принадлежит графику функции $y=\log_a x$.

Если точка (b,c) принадлежит графику функции $y=a^x$, то точка (c,b) принадлежит графику функции $y=\log_a x$.



График функции $y=\log_a x$ симметричен графику функции $y=a^x$ относительно прямой $y=x$.

На рис. 5 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда $a>1$; на рис. 6 схематически изображены графики функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ в случае, когда $0<a<1$.

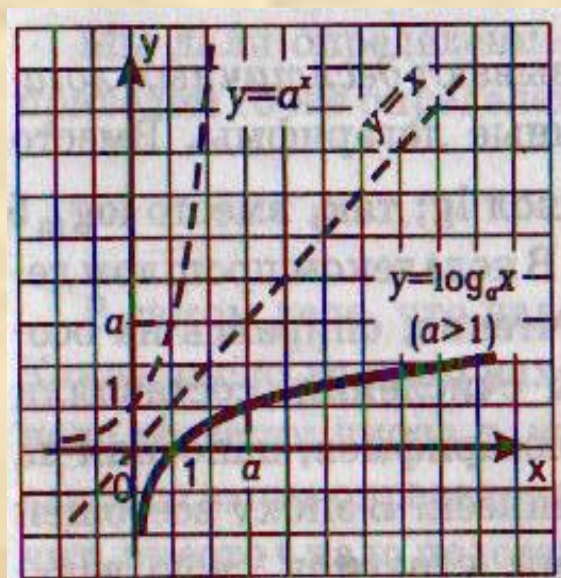


Рис. 5

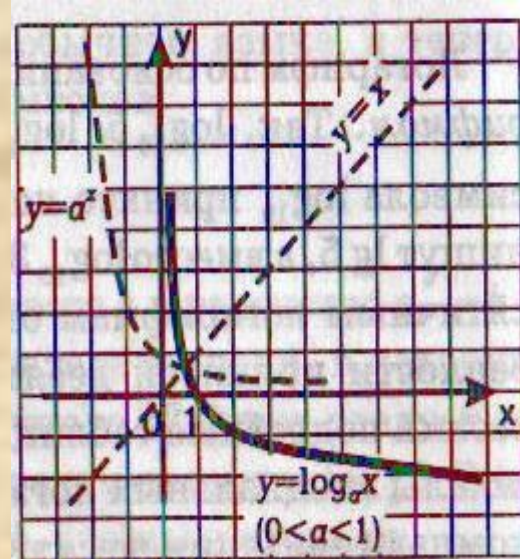
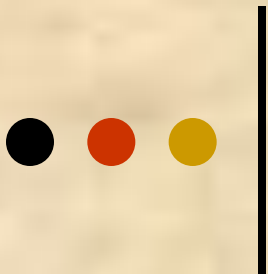


Рис. 6

Свойства функции $y = \log_a x$, $a > 1$

1. $D(f) = (0, +\infty)$;
2. не является ни четной, ни нечетной;
3. возрастает на;
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. $E(f) = (-\infty, +\infty)$;
8. выпукла вверх.



Домашнее задание

а) Решить уравнение: $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 1$

б) Построить график функции и найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке $[-2, 2]$

$$y = 3 \cdot 3^x + 2$$

в) Решить уравнение: $\log_{\frac{2}{5}} x = 0$

г) Найти наименьшее и наибольшее значения функций на заданном промежутке:

$$y = \lg x \quad x \in [1, 1000]$$



Спасибо за внимание

