

Линейные неравенства

Линейным неравенством с одной переменной x называют неравенства вида $ax+b>0$ (вместо знака $>$ может быть, разумеется, любой другой знак неравенства), где a и b - действительные числа ($a \neq 0$)

правило

- **Правило 1.** Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знака неравенства.
- **Правило 2.** Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже положительное число, не меняя при этом знака неравенства.
- **Правило 3.** Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и тоже отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($<на>$, $\leq на \geq$).

пример

Решить неравенство $\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}$

Решение: Умножим

Обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения (правило 2). Это позволит нам освободиться от знаменателей, т.е. перейти к более простому неравенству, равносильному данному:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x - 1) > 30x - 1;$$

$$11x - 3 > 30x - 1$$

Воспользовавшись правилом 1 решения неравенств, перенесем член $30x$ из правой части неравенства в левую, а член -3 — из левой части в правую (с противоположными знаками). Получим:

$$11x - 30x > -1 + 3;$$

$$-17x > 2.$$

Наконец, применив правило 3, получим:

$$x < -\frac{2}{17}$$

Квадратные неравенства

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2+bx+c>0$, где a, b, c – действительные числа (кроме $a=0$).

правило

Правило 1. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней (т.е. его дискриминант D -отрицательное число) и если при этом $a>0$, то при всех значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c>0.$$

Иными словами, если $D<0, a>0$, то неравенство $ax^2+bx+c>0$ выполняется при всех x ; напротив, неравенство $ax^2+bx+c\leq 0$ в этом случае не имеет решений.

Правило

Правило 2. Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c не имеет корней (т.е. его дискриминант D -отрицательное число) и если при этом $a<0$, то при всех значениях x выполняется неравенство

$$ax^2+bx+c<0.$$

Иначе говоря, если $D<0, a<0$, то неравенство $ax^2+bx+c<0$ выполняется при всех x ; напротив, неравенство $ax^2+bx+c\geq 0$ в этом случае не имеет решений.

эти утверждения-частные случаи следующей теоремы.

Теорема

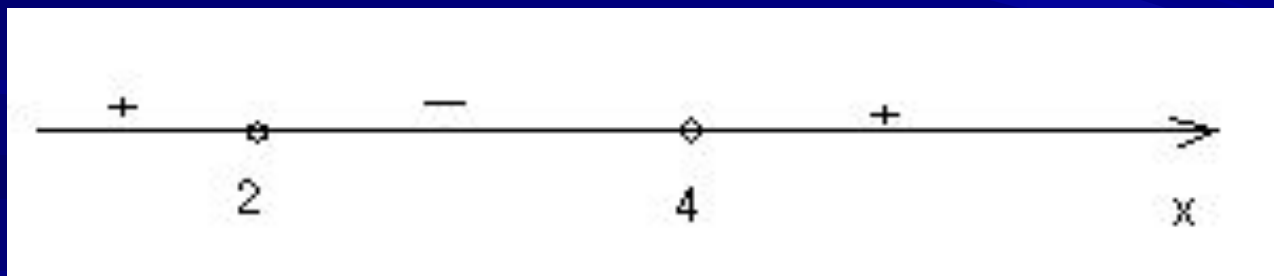
- Если квадратный трехчлен ax^2+bx+c имеет отрицательный дискриминант, то при любом x значение трехчлена имеет знак старшего коэффициента a .

Пример

Решить неравенство $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Решение: Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ на линейные множители. Корням трехчлена являются числа 2 и 4. Воспользовавшись известной из курса алгебры формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим: $x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4)$.

Отметим на числовой прямой корни трехчлена: 2 и 4. (рисунок). Выясним, когда произведение $(x - 2)(x - 4)$ Положительно, а когда отрицательно.



Если $x > 4$, то $x - 2 > 0$ и $x - 4 > 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) > 0$. Если $2 < x < 4$, то $x - 2 > 0$, а $x - 4 < 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) < 0$. Если, наконец, $x < 2$, то и $x - 2 < 0$, и $x - 4 < 0$, а потому $(x - 2)(x - 4) > 0$. Нас интересует все те значения переменной x , при которых данный квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ принимает положительные значения. Это имеет место на двух открытых лучах $(-\infty; 2) \cup (4; +\infty)$

Ответ: $x < 2; x > 4$.

Метод рассуждений, который мы применили в примере, называют обычно методом интервалов (или методом промежутков). Он активно используется в математике для решений рациональных неравенств.

Рациональные неравенства

Рациональное неравенство с одной переменной x -это неравенство вида $h(x) > q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ –рациональные выражения, т.е. алгебраические выражения, составленные из числа и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень. Разумеется, переменная может быть обозначена любой другой буквой.

Правило

При решении рациональных неравенств используются те правила, которые были сформулированы в предыдущих слайдах. С помощью этих правил обычно преобразуют заданное рациональное неравенство к виду $f(x) > 0 (< 0)$, где $f(x)$ - алгебраическая дробь (или многочлен). Далее разлагают числитель и знаменатель дроби $f(x)$ на множители вида $x - a$ (если, конечно, это возможно) и применяют метод интервалов, которые мы уже упоминали и подробнее покажем на примере.

Пример

Решить неравенство: $(x-1)(x+1)(x-2) \leq 0$.

Решение: Извлечем необходимую информацию из рисунка,

но с двумя изменениями. Во-первых, поскольку нас интересует, при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) < 0$, нам придется выбрать промежутки $(-\infty; -1) \cup (1; 2)$

Во-вторых, нас устраивают и те точки, в которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Это точки $-1, 1, 2$, отметим их на рисунке темными кружочками и включим в ответ. На рисунке представлена геометрическая иллюстрация решения неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

Ответ: $x \leq -1; 1 \leq x \leq 2$

