

# Линейное диофантово уравнение и 4 способа его решения

- ▶ Правило 1. Если  $c$  не делится на  $d$ , то уравнение  $ax + by = c$  не имеет решений в целых числах. Н.О.Д.  $(a, b) = d$ .

- ▶ Правило 2. Чтобы найти решение уравнения  $ax + by = c$  при взаимно-простых  $a$  и  $b$ , нужно сначала найти решение  $(x_0; y_0)$  уравнения  $ax + by = 1$ ; числа  $cx_0$ ,  $cy_0$  составляют решение уравнения  $ax + by = c$ .

► Решить в целых числах  $(x, y)$   
уравнение

$$5x - 8y = 19 \dots (1)$$

# Первый способ. Нахождение частного решения методом подбора и запись общего решения.

Знаем, что если Н.О.Д.(а;в) =1, т.е. а и в взаимно-простые числа, то уравнение (1)

имеет решение в целых числах x и y. Н.О.Д.(5;8) =1. Методом подбора находим частное решение:  $x_0 = 7$ ;  $y_0 = 2$ .

Итак, пара чисел (7;2) - частное решение уравнения (1).

Значит, выполняется равенство:  $5 \times 7 - 8 \times 2 = 19 \dots$  (2)

Вопрос: Как имея одно решение записать все остальные решения?

Вычтем из уравнения (1) равенство (2) и получим:  $5(x - 7) - 8(y - 2) = 0$ .

Отсюда  $x - 7 = \frac{8(y-2)}{5}$ . Из полученного равенства видно, что число (x - 7) будет целым тогда и только тогда, когда (y - 2) делится на 5, т.е.  $y - 2 = 5n$ , где n какое-нибудь целое число. Итак,  $y = 2 + 5n$ ,  $x = 7 + 8n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Тем самым все целые решения исходного уравнения можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

## Второй способ. Решение уравнения относительно одного неизвестного.

Решаем это уравнение относительно того из неизвестных, при котором наименьший (по модулю) коэффициент.  $5x - 8y = 19$

$$\Leftrightarrow 5x = 8y + 19 \Leftrightarrow x = \frac{8y+19}{5}.$$

Остатки при делении на 5: 0,1,2,3,4. Подставим вместо  $y$  эти числа.

$$\text{Если } y = 0, \text{ то } x = \frac{8 \times 0 + 19}{5} = \frac{19}{5}.$$

$$\text{Если } y = 1, \text{ то } x = \frac{8 \times 1 + 19}{5} = \frac{27}{5}.$$

$$\text{Если } y = 2, \text{ то } x = \frac{8 \times 2 + 19}{5} = \frac{35}{5} = 7 \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Если } y = 3, \text{ то } x = \frac{8 \times 3 + 19}{5} = \frac{43}{5}.$$

$$\text{Если } y = 4 \text{ то } x = \frac{8 \times 4 + 19}{5} = \frac{51}{5}.$$

Итак, частным решением является пара  $(7;2)$ .

$$\text{Тогда общее решение: } \begin{cases} x = 7 + 8n, \\ y = 2 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$

## Третий способ. Универсальный способ поиска частного решения.

Для решения применим алгоритм Евклида. Мы знаем, что для любых двух натуральных чисел  $a, b$ , таких, что  $\text{Н.О.Д.}(a, b) = 1$  существуют целые числа  $x, y$  такие, что  $ax + by = 1$ .

План решения:

1. Сначала решим уравнение  $5m - 8n = 1$  используя алгоритм Евклида.
2. Затем найдем частное решение уравнения (1) по правилу 2.
3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1. Найдем представление:  $1 = 5m - 8n$ . Для этого используем алгоритм Евклида.

$$8 = 5 \times 1 + 3.$$

$$5 = 3 \times 1 + 2.$$

$$3 = 2 \times 1 + 1.$$

Из этого равенства выразим 1.  $1 = 3 - 2 \times 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 =$

$$= 3 - 5 \times 1 + 3 \times 1 = 3 \times 2 - 5 \times 1 = (8 - 5 \times 1) \times 2 - 5 \times 1 = 8 \times 2 - 5 \times 2 - 5 \times 1 =$$

$$= 5 \times (-3) - 8 \times (-2). \text{ Итак, } m = -3, n = -2.$$

2. Частное решение уравнения (1):  $X_0 = 19m$ ;  $y_0 = 19n$ .

Отсюда получим:  $X_0 = 19 \times (-3) = -57$ ;  $y_0 = 19 \times (-2) = -38$ .

Пара  $(-57; -38)$ - частное решение (1).

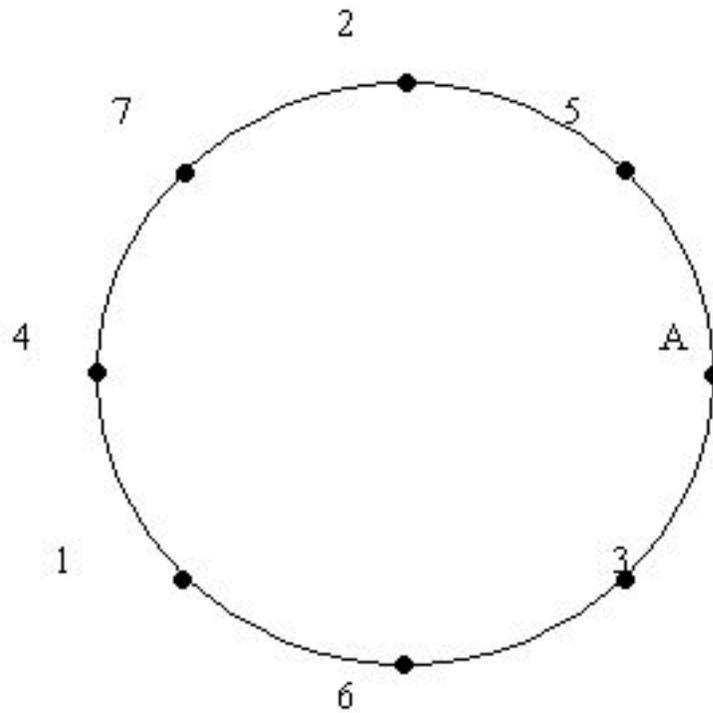
3. Общее решение уравнения (1):  $\begin{cases} x = -57 + 8n, \\ y = -38 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$

## *Четвертый способ. Геометрический.*

План решения.

1. Решим уравнение  $5x - 8y = 1$  геометрически.
2. Запишем частное решение уравнения (1).
3. Запишем общее решение данного уравнения (1).

1



Отложим на окружности последовательно друг за другом равные дуги, составляющие

$\frac{5}{8}$ -ю часть полной окружности. За 8 шагов получим все вершины правильного вписанного в окружность 8-угольника. При этом сделаем 5 полных оборотов.

На 5-ом шаге получили вершину, соседнюю с начальной, при этом сделали 3 полных оборота и еще прошли  $\frac{1}{8}$ -ю часть окружности, так

$$\text{что } x \times \frac{5}{8} = y + \frac{1}{8}.$$

Итак,  $X_0 = 5$ ,  $y_0 = 3$  является частным решением уравнения  $5x - 8y = 1$ .

2. Частное решение уравнения (1):  $X_0 = 19 \times 5 = 95$ ;  $y_0 = 19 \times 3 = 57$ .

3. Общее решение уравнения (1): 
$$\begin{cases} x = 95 + 8n, \\ y = 57 + 5n. \end{cases} n \in \mathbb{Z}.$$