

3.4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$
называется вектор $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n$
где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ - любые действительные
числа.

Например, даны три вектора:

$$\vec{a}_1 = (1; 2; 0) \quad \vec{a}_2 = (2; 1; 1) \quad \vec{a}_3 = (-1; 1; -2)$$

И числа $\alpha_1 = 2 \quad \alpha_2 = 3 \quad \alpha_3 = 4$

Линейной комбинацией этих векторов будет вектор:

$$\vec{b} = (4; 1; -5)$$

Говорят, что вектор $\vec{b}$ разлагается по векторам $\vec{a}$.

Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$

называются линейно зависимыми, если
существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$
не равные нулю одновременно, что

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$$

В противном случае вектора называются
линейно независимыми.

Пусть система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n$

линейно зависима: $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = 0$

Выберем в этой сумме член с номером s и выразим его через остальные слагаемые:

$$\alpha_s \vec{a}_s = -\alpha_1 \vec{a}_1 - \alpha_2 \vec{a}_2 - \dots - \alpha_k \vec{a}_k$$

$$\vec{a}_s = -\frac{\alpha_1}{\alpha_s} \vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_s} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_s} \vec{a}_k$$

Т. об., один из векторов линейно зависимой системы оказывается выраженным через другие вектора этой системы.

Свойства линейнозависимой системы векторов

+

Система, состоящая из одного вектора, линейно зависима.

+

Система, содержащая нулевой вектор, всегда линейно зависима.



Система, содержащая более одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда среди ее векторов содержится хотя бы один вектор, который линейно выражается через остальные вектора системы.

Геометрический смысл линейной зависимости векторов:

Если два вектора линейно зависимы, то они коллинеарны: $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$

Если три вектора линейно зависимы, то они компланарны.