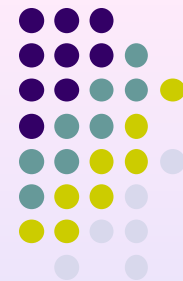


Решение квадратных уравнений с параметрами



$$Ax^2 + Bx + C = 0, \quad (A \neq 0) \quad (1)$$

A, B, C- выражения, зависящие от параметров

Схема исследования уравнения

1) Если $A=0$, то $B \cdot x + C = 0$, $x = -\frac{C}{B}$,

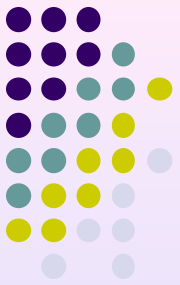
2) Если $A \neq 0$, то находим дискриминант

$$D = b^2 - 4ac,$$

а) $D > 0$ $x_{1;2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$

б) $D < 0$, то уравнение не имеет решений

в) $D = 0$, то уравнение имеет единственное решение $x = -\frac{B}{2A}$,



Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$

имеет 1 корень (совпадающие корни) ?

Решение. Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет 1 корень $D = 0$.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) = 0$$

$$a_1 = 0, a_2 = 20.$$

Ответ. $a = 0, a = 20$.



Пример 1.

Найти все значения параметра a , для которых уравнение $(a-1)x^2 + 2(2a+1)x + 4a+3 = 0$

- а) имеет 2 различных корня;
- б) не имеет корней;
- в) имеет 2 равных корня.

Решение.

Данное уравнение по условию является квадратным, поэтому $a-1 \neq 0$.

Найдем дискриминант уравнения $D = 4(2a+1)^2 - 4 \cdot (a-1)(4a+3) = 4(5a+4)$

а) $D > 0, a \neq 1 \quad 4(5a+4) > 0,$
 $\underline{a > -4/5.}$

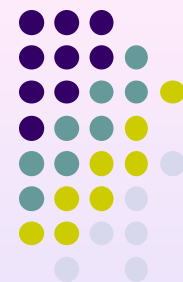
б) $D < 0, \quad \underline{a < -4/5}$

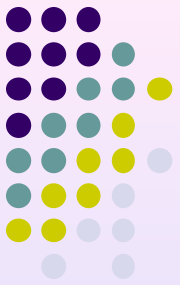
в) $D = 0, \quad \underline{a = -4/5}$

Ответ: если $a > -4/5$ и $a \neq 1$, то два различных корня,

если $a < -4/5$, то нет корней,

если $a = -4/5$, то два равных корня.





Пример 2.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a^2 - a - 2)x^2 + (a + 1)x + 1 = 0 \quad \text{не имеет решений?}$$

Решение.

$$1) \quad a^2 - a - 2 = 0 \quad a = 2, a = -1$$

$$\text{При } a=2, \quad 3x+1=0, \quad x = -1/3$$

при $a = -1$, $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1 = 0$, не имеет решений.

$$2) \quad a^2 - a - 2 \neq 0 \quad a \neq 2, \quad a \neq -1$$

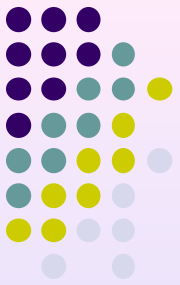
В данном случае уравнение является квадратным и не имеет решений, если дискриминант меньше нуля

$$D = (a + 1)^2 - 4(a^2 - a - 2) = -3a^2 + 6a + 9 = -3(a - 3)(a + 1)$$

$$D < 0 \quad -3(a - 3)(a + 1) < 0, \\ (a - 3)(a + 1) > 0,$$

Теперь с учетом первого случая получаем

$$\text{Ответ: } a \in (-\infty; -1] \cup (3; +\infty)$$

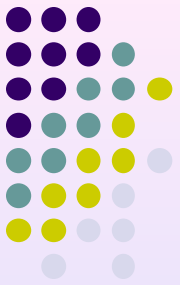


Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение?



Пример 3.

При каких значениях параметра a уравнение

$$(a + 6)x^2 + 2ax + 1 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение.

По условию задачи уравнение обязательно является квадратным, поэтому рассмотрим два случая

$$\begin{aligned} 1) \quad a + 6 &= 0, \\ a &= -6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Если } a = -6, \text{ то } -12x + 1 &= 0, \\ x &= 1/12. \end{aligned}$$

2) Если $a \neq -6$, то квадратное уравнение имеет единственное решение, если $D = 0$

$$D = 4a^2 - 4(a + 6) = 4(a^2 - a - 6),$$

$$a^2 - a - 6 = 0,$$

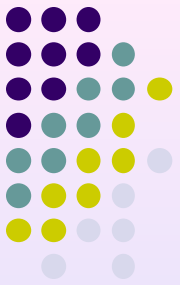
$$a_1 = 3, a_2 = -2$$

Ответ: при $a \in \{-6, -2; 3\}$

Пример 4.

Для всех значений параметра a решить уравнение

$$(a - 1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$



Пример 4.

Для всех значений параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - 2ax + a + 2 = 0$$

Решение.

1) $a - 1 = 0$, Если $a = 1$, то уравнение имеет вид $-2x + 3 = 0$, $x = 3/2$.
 $a = 1$

2) Если $a \neq 1$. Найдем дискриминант уравнения

В зависимости от значения D возможны случаи. $D = 4a^2 - 4(a-1)(a+2) = -4a + 8$,

а) $\begin{cases} D < 0 \\ -4a + 8 < 0 \\ a > 2, \end{cases}$ Уравнение не имеет корней

б) $\begin{cases} a \neq 1, \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \end{cases}$ тогда $x = \frac{a}{a-1} = 2$
 $\begin{cases} D = 0, \\ -4a + 8 = 0, \\ a = 2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} D > 0 \\ -4a + 8 > 0 \\ a < 2, \end{cases}$ $x_{1,2} = \frac{2a \pm \sqrt{-4a+8}}{2(a-1)} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$
 $\begin{cases} a \neq 1, \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ a \neq 1, \end{cases} \end{cases}$

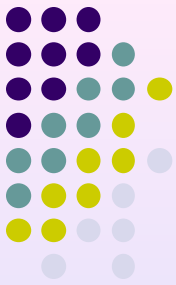
Ответ: если $a=1$, то $x = 3/2$.

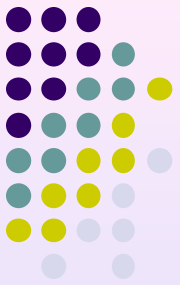
$a=2$, то $x=2$,

$a>2$, то -нет решений

$a<2$ и $a \neq 1$, то

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2-a}}{a-1}$$





Теорема Виета

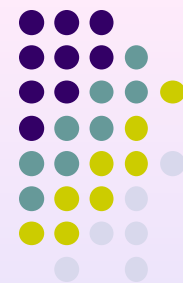
Если x_1, x_2 . корни квадратного уравнения

$$Ax^2 + Bx + C = 0 \qquad x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0$$

то
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{C}{A}. \end{cases}$$



Равенства, которые необходимо знать



Если x_1, x_2 . корни квадратного уравнения

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0 \quad , \text{ то}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2,$$

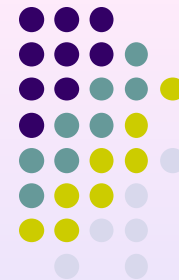
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2),$$

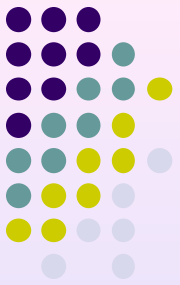
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$$

$$\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2}{(x_1x_2)^2}$$



Пример 1. Найти сумму и произведение корней уравнения $3x^2 + 4x - 5 = 0$.





Пример 1. Найти сумму и произведение корней уравнения

$$3x^2 + 4x - 5 = 0.$$

Решение. 1) **Проверка:** имеет ли уравнение действительные корни?

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5) = 16 + 60 = 76,$$

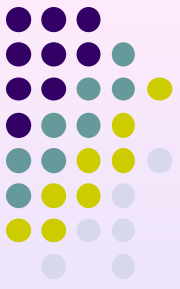
$$76 > 0$$

Уравнение имеет действительные корни.

2) **Нахождение суммы и произведения** корней уравнения с использованием теоремы Виета.

$$x_1 + x_2 = -\frac{4}{3}, \quad x_1 \cdot x_2 = -\frac{5}{3}.$$

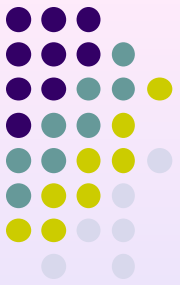




Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$





Пример 2. *Найти сумму и произведение корней уравнения*

$$2x^2 + 3x + 3 = 0.$$

Решение. *Проверка: имеет ли уравнение действительные корни?*

$$D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3$$

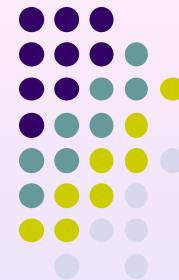
$$D < 0$$

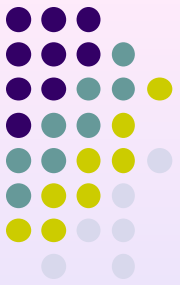
Уравнение не имеет действительных корней.

Ответ. *Уравнение не имеет действительных корней.*



Пример 3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + ax + 5a = 0$ равно 10 ?





Пример 3. При каких значениях параметра a произведение корней уравнения $x^2 + ax + 5a = 0$ равно 10 ?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \geq 0$$

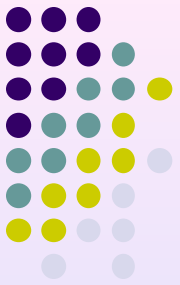
$$\underline{a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty)}.$$

2) По теореме Виета произведение корней уравнения равно 10, если
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 5a = 10. \end{cases}$$

$$\text{Решение системы: } \begin{cases} a \in (-\infty; 0] \cup [20; +\infty), \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in \emptyset}.$$

Ответ: $a \in \emptyset$.





Пример 4 Не решая уравнения $3\kappa x^2 - (\kappa + 1)x - 3\kappa^2 = 0$

найти $x_1^{-1} + x_2^{-1}$, где

$x_1; x_2$ корни уравнения

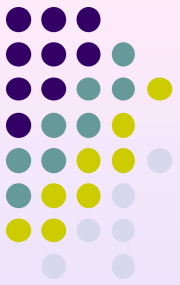
Ответ: $-\frac{\kappa + 1}{3\kappa^2}$

Пример 5.

При каких значениях параметра a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 = 0$ равна 4?

Ответ: при $a = 0$





Пример 6 При каких значениях параметра p разность корней уравнения $x^2 - px - 20p = 0$ равна 9.

Ответ: при $p = -81$ и $p = 1$



Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена

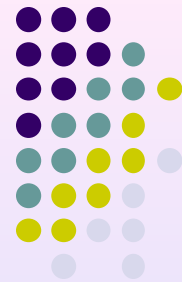
$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

□ Уравнение имеет корни одного знака, если

□ Уравнение имеет положительные корни, если

□ Уравнение имеет отрицательные корни, если

□ Уравнение имеет корни разных знаков, если

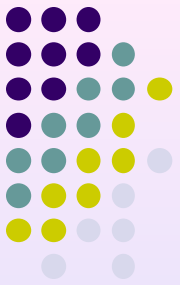


$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} < 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ \frac{C}{A} < 0 \end{array} \right.$$



Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 5a = 0$ имеет корни разных знаков ?

Решение. 1) Найдем все значения параметра a , при которых уравнение имеет действительные решения.

$$D = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5a = a^2 - 20a = a(a - 20) \quad , D \geq 0$$
$$\underline{a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty)}.$$

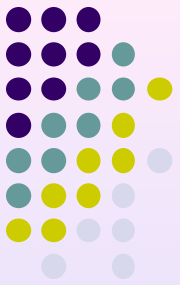
2) Уравнение имеет корни разных знаков, если

$$\begin{cases} D \geq 0, \\ 5a < 0. \end{cases}$$

Решение системы: $\begin{cases} a \in (-\infty; 0) \cup (20; +\infty), \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{a \in (-\infty; 0)}.$

Ответ: $a \in (-\infty; 0).$





Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение

$$(a-1)x^2 - 2(a-2)x + a+3 = 0 \quad \text{имеет}$$

а) корни разных знаков;

б) корни одного знака;

в) положительные корни

Решение. По формулам Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(a-2)}{a-1}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{a+3}{a-1}. \end{cases}$$

а) исходное уравнение имеет корни разных знаков, если выполняется условие

$$\begin{cases} D > 0, \\ \frac{C}{A} < 0. \end{cases} \quad \underline{\frac{a+3}{a-1} < 0.}$$

$$a \in (-3; 1).$$



б) исходное уравнение имеет корни одного знака, если выполняется условие

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4(7 - 6a) \geq 0, \\ \frac{a + 3}{a - 1} > 0; \end{cases}$$

$$a \in (-\infty; -3) \cup (1; \frac{7}{6}]$$

в)) исходное уравнение имеет положительные корни, если выполняется условие

$$a \in (-3; 1). \quad \begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{B}{A} > 0, \\ \frac{C}{A} > 0. \end{cases}$$

Ответ: если $a \in (-3; 1)$, то уравнение имеет корни разных знаков,
если $a \in (-\infty; -3) \cup (1; \frac{7}{6}]$, то корни – одного знака;

если $a \in (-\infty; -3)$ то положительные корни.

