

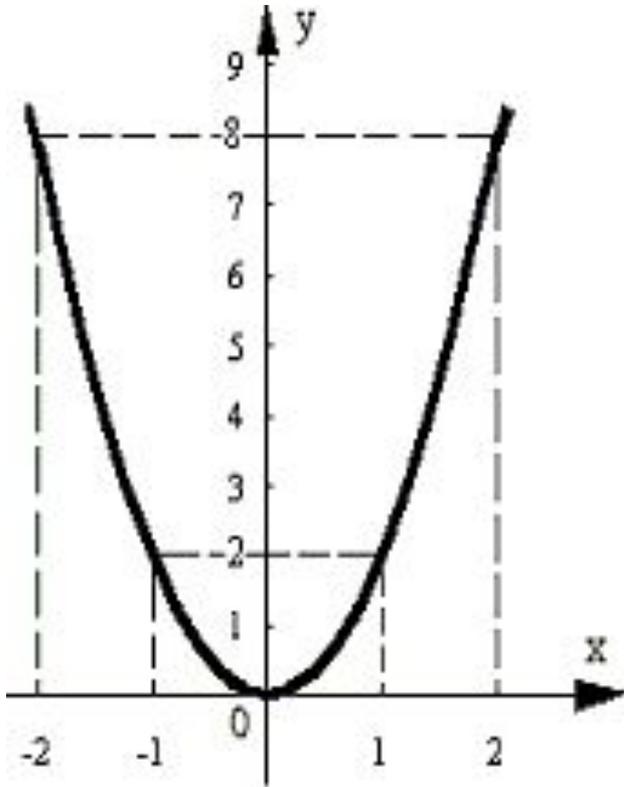
# Корреляционный и регрессионный анализ

- Жорж Кювье, XVIII в., «Закон корреляции».
- Фрэнсис Гальтон, конце XIX в., понятие «корреляция» в статистике, «corelation» (соответствие).

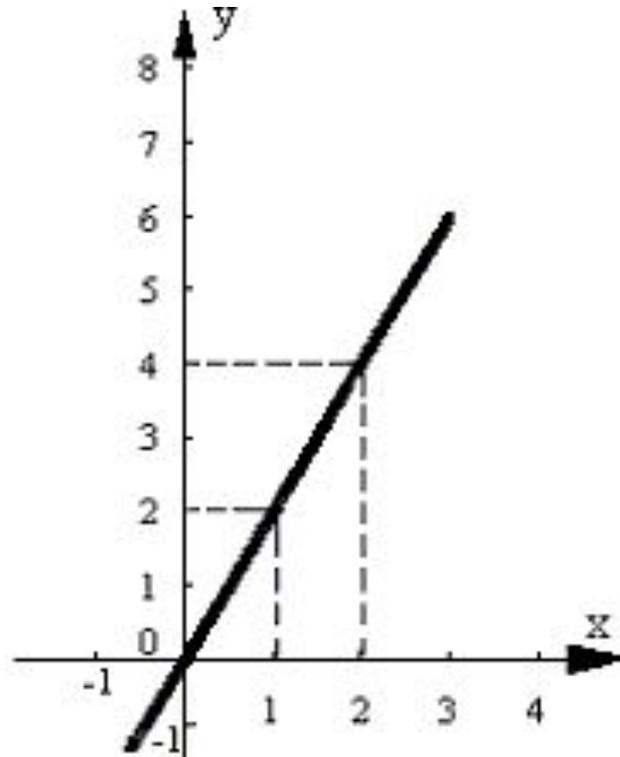
- Различают два типа связей между различными явлениями и их признаками: **функциональную и статистическую.**

- **Статистической** называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение распределения других (другой), и эти другие величины принимают некоторые значения с определенными вероятностями.
- **Функциональной** называют зависимость, в которой значению одной переменной обязательно соответствует одно или несколько точно заданных значений другой переменной.
- В общем виде  $y = f(x)$ , где  $y$  – зависимая переменная, или функция от независимой переменной  $x$

# Примеры функциональной зависимости



$$y = x^2$$



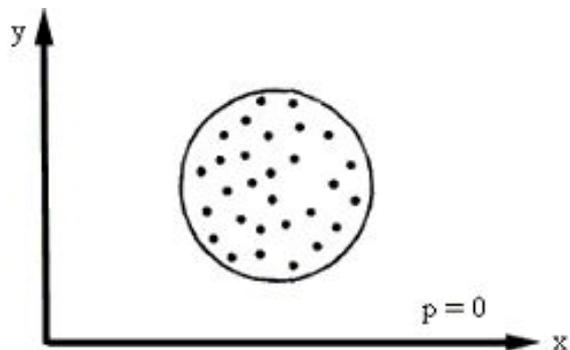
$$y = a + bx^2$$

- **Корреляционная** зависимость, характеризующая взаимосвязь значений одних случайных величин со средним значением других, хотя в каждом отдельном случае любая взаимосвязанная величина может принимать различные значения.
- Если же у взаимосвязанных величин вариацию имеет только одна переменная, а другая является детерминированной (т.е. строго определенной), то такую связь называют не корреляционной, а **регрессионной**.

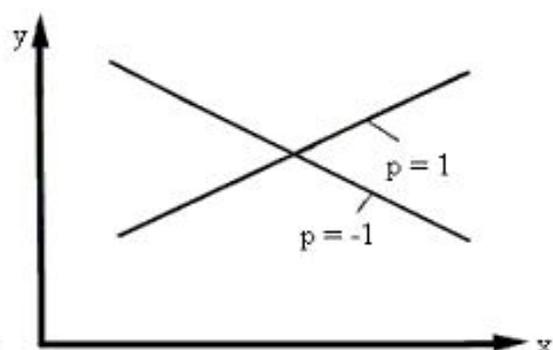
- Задачи корреляционного анализа:
- 1) измерение параметров уравнения, выражающего связь средних значений зависимой переменной со значениями независимой переменной;
- 2) измерение тесноты связи двух (или большего числа) признаков между собой.
- Вторая задача специфична для статистических связей (корреляционный анализ), а первая разработана для функциональных связей и является общей (корреляционный и регрессионный анализ).

- Для измерения тесноты связи применяется несколько показателей, например коэффициент корреляции.
- Корреляционная связь между признаками может быть *линейной и нелинейной, положительной и отрицательной*.

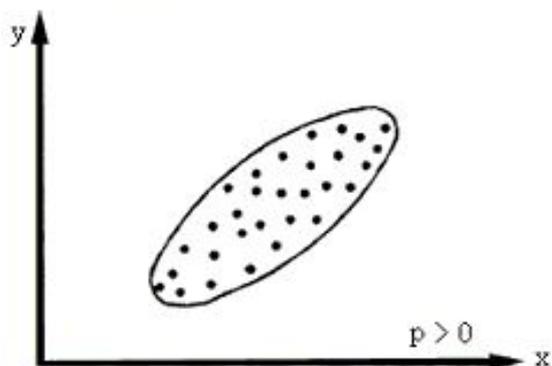
# Графическая интерпретация взаимосвязи между показателями



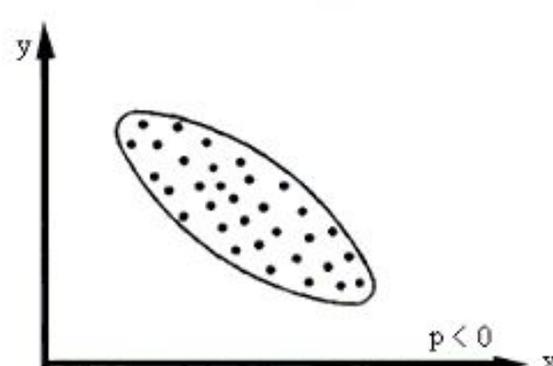
а) независимость



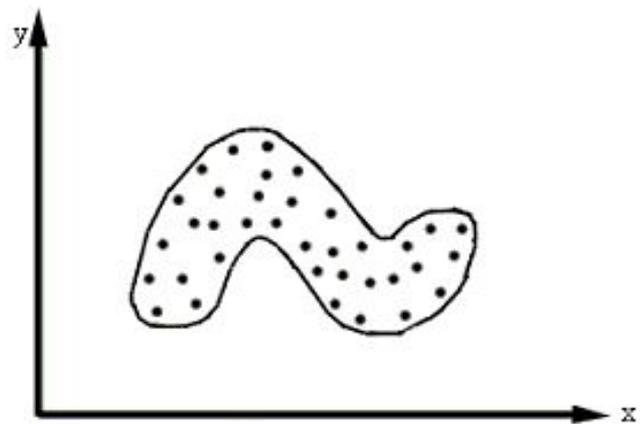
б) линейная зависимость



в) прямая положительная зависимость



г) прямая отрицательная зависимость



д) криволинейная зависимость

# Регрессионный анализ

- Задачей регрессионного анализа является нахождение функциональной зависимости между зависимой  $y$  и независимой  $x$  переменными  $y = f(x)$ , которую называют **регрессией (или функцией регрессии)**. График функции называют **линией или кривой регрессии**.
- На практике  $x$  задается, а  $y$  - это наблюдение какой-либо величины на опыте, в эксперименте.

Зависимость может быть линейной

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

и нелинейной.

$$y = \beta_0 + \beta_1 \exp(\beta_2 x)$$

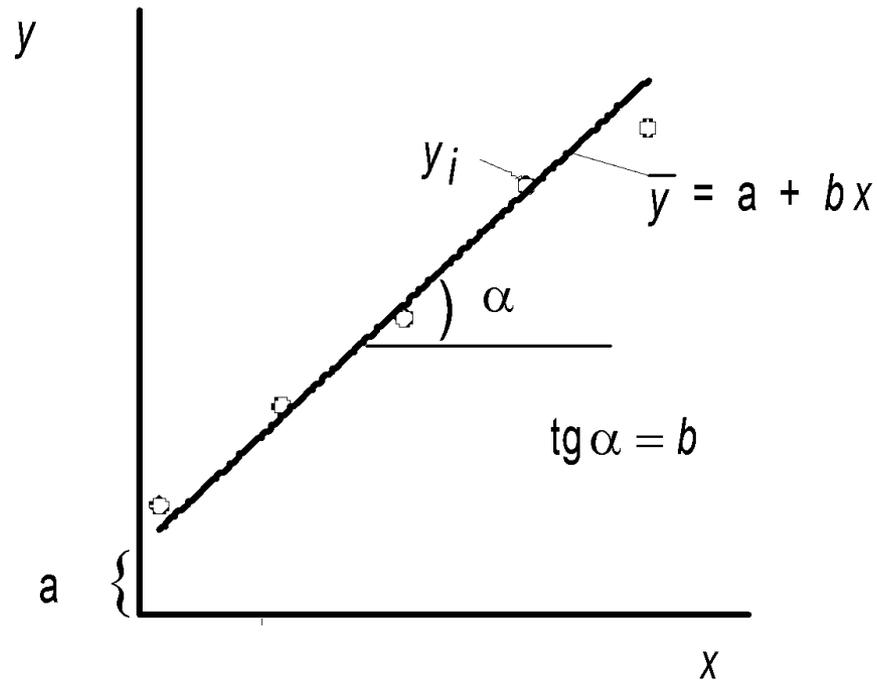
Если одна независимая переменная, то регрессию называют простой.

Если две независимых переменных или более, то регрессию называют множественной.

- Задачи линейного регрессионного анализа:
  1. Оценка параметров линейной модели.
  2. Оценка адекватности линейной модели (или тесноты линейной связи между переменными).

# (Простой) линейный регрессионный анализ

Рассмотрим простую линейную модель:  $y = a + bx$ .



- Основным методом решения задачи нахождения параметров уравнения является метод наименьших квадратов (МНК), разработанный К. Ф. Гауссом.

Суть МНК:

Если все измерения  $y_i$  выполняются с одинаковой точностью при значениях  $x_i$ , то оценки параметров  $a$ ,  $b$  определяются из условия, чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений  $y_i$  от рассчитанных была минимальной.

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - \hat{y}]^2 = \min$$

или

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - a - bx_i]^2 = \min$$

Параметры модели находят из условия

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0 \text{ и } \frac{\partial S}{\partial b} = 0.$$

В точке минимума эти производные должны превратиться в ноль.

Продифференцируем уравнение прямой по параметрам  $a$ ,  $b$ . Получим систему уравнений, решение которой дает выражение для параметров.

$$\begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) = 0 \\ -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i) x_i = 0 \end{cases}$$

После преобразований получим:

$$\begin{cases} na + \sum_{i=1}^n bx_i = \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n ax_i + \sum_{i=1}^n bx_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{cases}$$

После решения системы уравнений получим

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

- Для определения степени тесноты парной линейной зависимости (адекватности) служит **коэффициент корреляции  $r$** :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n xy - \frac{\sum_{i=1}^n x \cdot \sum_{i=1}^n y}{n}}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n x^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n x \right)^2}{n} \right] \left[ \sum_{i=1}^n y^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n y \right)^2}{n} \right]}}$$

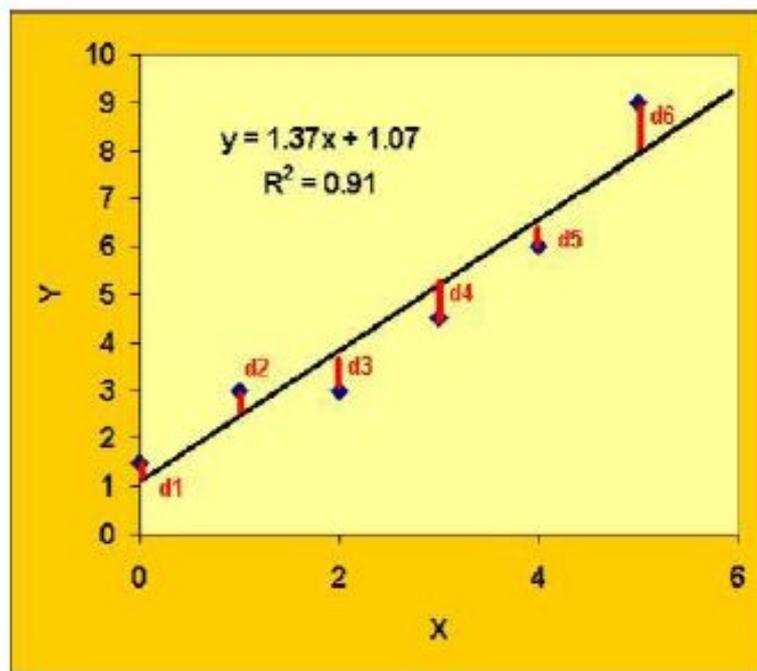
- Коэффициент корреляции может принимать значения в пределах от 0 до 1. Чем ближе он по абсолютной величине к 1, тем теснее связь.

## Линейная регрессия

$$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$$

$$\bar{x}_y = \rho_{xy}y + c$$

### Метод наименьших квадратов



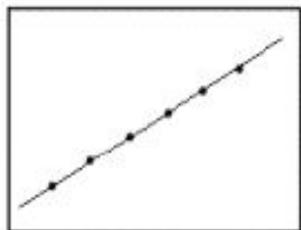
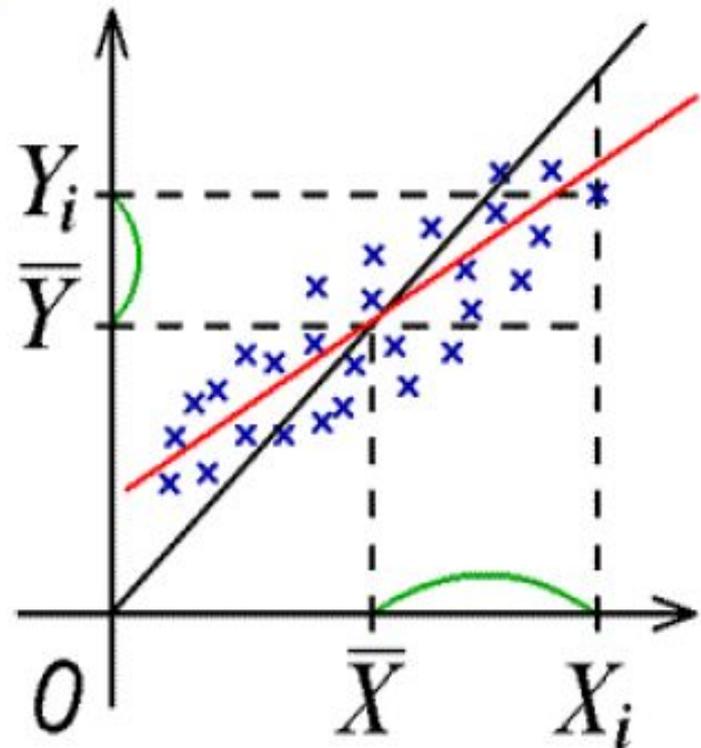
$$\sum_{i=1}^n (y_{\text{теор}i} - y_{\text{факт}i})^2 = \sum_{i=1}^n d_i^2 \rightarrow \min$$

## Линейная корреляция

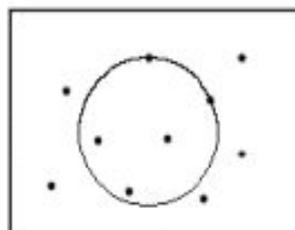
$$r_B = \pm \sqrt{\rho_{yx} \cdot \rho_{xy}}$$

$$\bar{y}_x - \bar{y} = r_B \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x})$$

$$\bar{x}_y - \bar{x} = r_B \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (y - \bar{y})$$



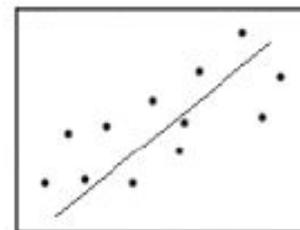
$r = +1.0$



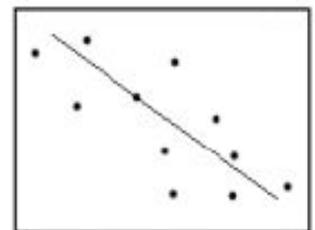
$r = 0.0$



$r = -1.0$



$r \approx +0.6$



$r \approx -0.6$

Таблица 1

$\bar{y}_x = \rho_{yx}x + b$	$\rho_{yx} = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$	$b = \frac{\sum x^2 \cdot \sum y - \sum x \cdot \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}$
$\bar{x}_y = \rho_{xy}y + c$	$\rho_{xy} = \frac{n \sum xy - \sum x \cdot \sum y}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$	$c = \frac{\sum y^2 \cdot \sum x - \sum y \cdot \sum xy}{n \sum y^2 - (\sum y)^2}$

Пример 3. В результате исследований зависимости двух случайных величин  $X$  и  $Y$  были получены следующие экспериментальные данные:

$x_i$	1,00	1,50	3,00	4,50	5,00
$y_i$	1,25	1,40	1,50	1,75	2,25

Определить параметры выборочного уравнения линейной регрессии  $Y$  на  $X$  и  $X$  на  $Y$ .