Степень с рациональным показателем и ее свойства

Степенью числа a>0 с рациональным показателем $r=\frac{m}{n}$, где m - целое число, а n- натуральное $(n>1)$, называется число $\sqrt[n]{a^m}$, т.е.

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$$

Например: $8^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{8^2}=\left(\sqrt[3]{8}\right)^2=2^2=4$

$$81^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{81^3}=\left(\sqrt[4]{81}\right)^3=3^3=27$$

$$128^{-\frac{2}{7}}=\sqrt[7]{128^{-2}}=\left(\sqrt[7]{128}\right)^{-2}=2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$$

$$100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$$

$$27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$$

Для любых рациональных чисел r и s и любых положительных a и b справедливы равенства:

1º. $$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

2º. $$a^r : a^s = a^{r-s}$$

3º. $$\left(a^r\right)^s = a^{rs}$$

4º. $$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

5º. $$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

6º. Пусть r- рациональное число и $0 < a < b$. Тогда

$$a^r < b^r \quad \text{при} \quad r > 0,$$

$$a^r > b^r \quad \text{при} \quad r < 0.$$

7º. Для любых рациональных чисел r и s из неравенства $r > s$

следует, что $a^r > a^s$ при $a > 1,$

$$a^r < a^s \quad \text{при} \quad 0 < a < 1.$$

Например: Сравнить числа $\sqrt[5]{8}$ и $2^{\frac{2}{3}}$

Представим $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$.

По свойству **7º** имеем $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$, т.к. $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$.