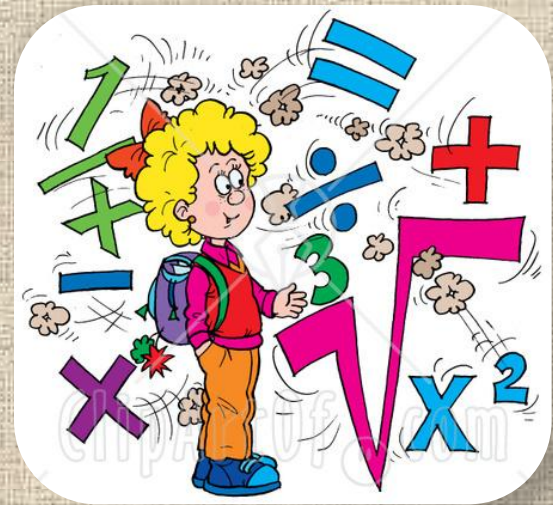


КОРЕНЬ n – ой СТЕПЕНИ. АРИФМЕТИЧЕСКИЙ КОРЕНЬ n – ой СТЕПЕНИ, ЕГО СВОЙСТВА.



Задачи урока:

- систематизировать и обобщить знания о корнях;
- продолжить формирование навыков применения свойств корней при решении задач и для простейших вычислений;
- продолжить формирование навыков простейших преобразований выражений с корнями; выполнения действий над корнями.

Понятие корня

Корнем n -й степени из числа a называется такое число b , n -я степень которого равна a ($n \geq 2$). Обозначается $\sqrt[n]{a}$, где a - подкоренное выражение (или число), n - показатель корня ($n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$).

По определению $\sqrt[n]{a} = b$, если b в степени n равно a , или $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

Основные свойства корня

- а) корень четной степени из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и противоположные по знаку;

$$\sqrt{49} = \pm 7$$

- б) корень четной степени из отрицательного числа в множестве действительных чисел не существует;

$$\sqrt{-9} \neq 3; \sqrt{-9} \neq -3$$

- в) корень нечетной степени из положительного числа имеет только одно действительное значение, которое положительно;

$$\sqrt[3]{8} = +2$$

Основные свойства корня

г) корень нечетной степени из отрицательного числа имеет только одно действительное значение, которое отрицательно;

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

д) корень любой натуральной степени из нуля равен нулю.

Понятие арифметического корня

Арифметическим корнем n -й степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n -я степень которого равна a . Корень называется арифметическим, если он извлекается из положительного числа и сам представляет собой положительное число.

Например,

$$\sqrt{49} = 7; \sqrt{49} \neq -7$$

Арифметический корень данной степени из данного числа может быть только один.

Арифметический корень тесно связан с понятием абсолютной величины (модуля) числа, а именно:

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ 0, & \text{при } a = 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Свойства арифметических корней

Чтобы извлечь арифметический корень из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{225} = \sqrt{9 \cdot 25} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{25} = 3 \cdot 5 = 15$$

$$\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{8 \cdot 4} = \sqrt[5]{32} = 2$$

Чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь его из числителя и знаменателя отдельно

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{128}{2}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Чтобы извлечь корень из степени,
можно разделить показатель степени на
показатель корня

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

$$\sqrt[3]{x^{12}} = x^{\frac{12}{3}} = x^4$$

Действия с корнями:

Величина корня не изменится, если его показатель увеличить в n раз и одновременно возвести подкоренное значение в степень n :

$$\sqrt[m]{a} = \sqrt[m \cdot n]{a^n}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{4}} = \frac{\sqrt{2}}{4^{\frac{1}{2}} \sqrt[2]{4^{\frac{1}{2}}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

Действия с корнями:

Величина корня не изменится, если показатель степени уменьшить в n раз и одновременно извлечь корень n -й степени из подкоренного значения:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{a}}$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$$

Действия с корнями:

Чтобы возвести корень в степень,
достаточно возвести в эту степень
подкоренное значение

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

$$\left(\sqrt{4}\right)^4 = \sqrt{4^4} = 4^{\frac{4}{2}} = 4^2 = 16$$

Действия с корнями:

Обратно, чтобы извлечь корень из степени, достаточно возвести в эту степень корень из основания степени:

$$\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

$$\sqrt{4^4} = \left(\sqrt{4}\right)^4 = 2^4 = 16$$

Внесение множителя под знак квадратного корня

$$b\sqrt{a} = \sqrt{b^2 a}, \text{ если } b \geq 0; \quad b\sqrt{a} = -\sqrt{b^2 a}, \text{ если } b < 0$$

$$\text{Например, } 3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}; \quad -2\sqrt{3} = -\sqrt{2^2 \cdot 3} = -\sqrt{12}$$

Вынесение множителя из — под знака квадратного корня

$$\sqrt{b^2 a} = b\sqrt{a} \text{ , если } b \geq 0, a \geq 0;$$

$$\sqrt{b^2 a} = -b\sqrt{a} \text{ , если } b < 0, a \geq 0$$

$$\sqrt{b^2 a} = |b|\sqrt{a} .$$

Например, $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = 5\sqrt{2}$; $\sqrt{12} = \sqrt{4 \cdot 3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

Подведем итоги:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0);$$

$$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k};$$

$$(\sqrt[n]{a^n}) = a \quad (a \geq 0);$$

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \text{ если } 0 \leq a < b;$$

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0 \\ -a, & \text{при } a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{2n}{a^{2n}} = |a|;$$

$$\sqrt{2n+1}{-a} = -\sqrt{2n+1}{a} \quad (a \geq 0).$$