

КОМПОЗИЦИЯ ФУНКЦИЙ

Работу выполнили
ученики 10 б класса
Руководитель Фомичёва
Валентина Николаевна

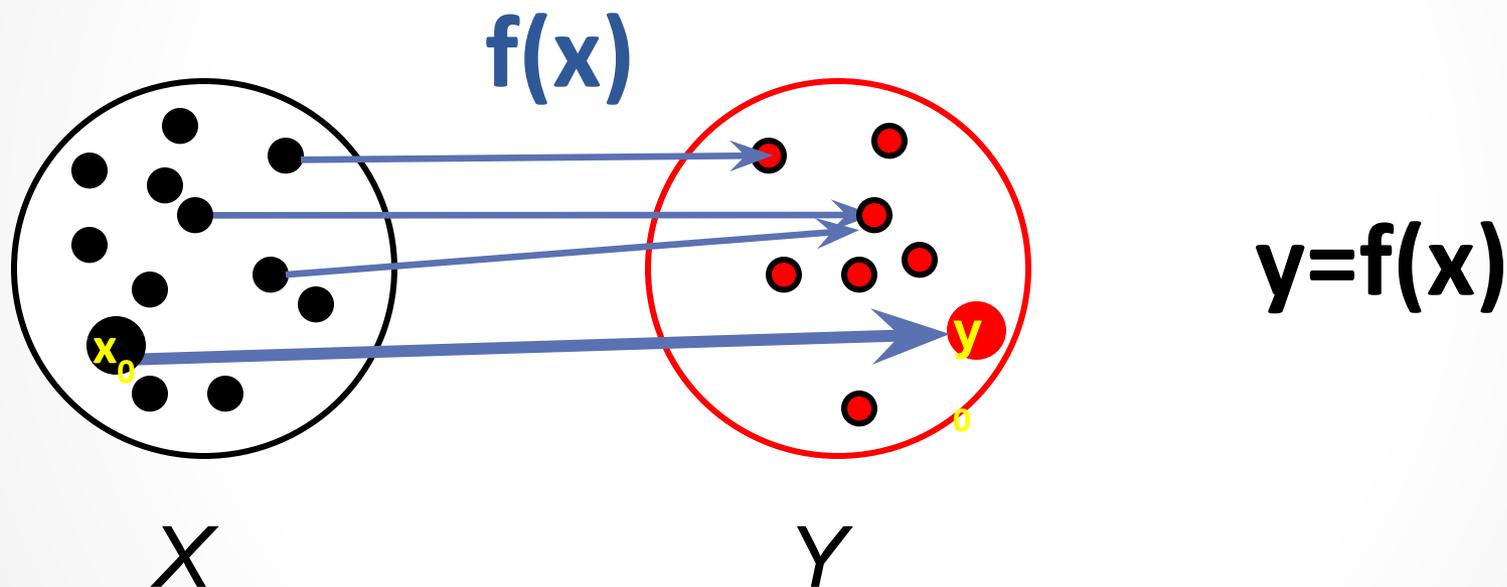
Цели работы

- Разобраться, что такое композиция функций, и как применить это новое понятие на практике
- Потренироваться в решении заданий с функциональными уравнениями и с построениями графиков
- Закрепить пройденный материал по производным
- Заинтересовать учащихся, привлечь их внимание к данной теме



Определение функции

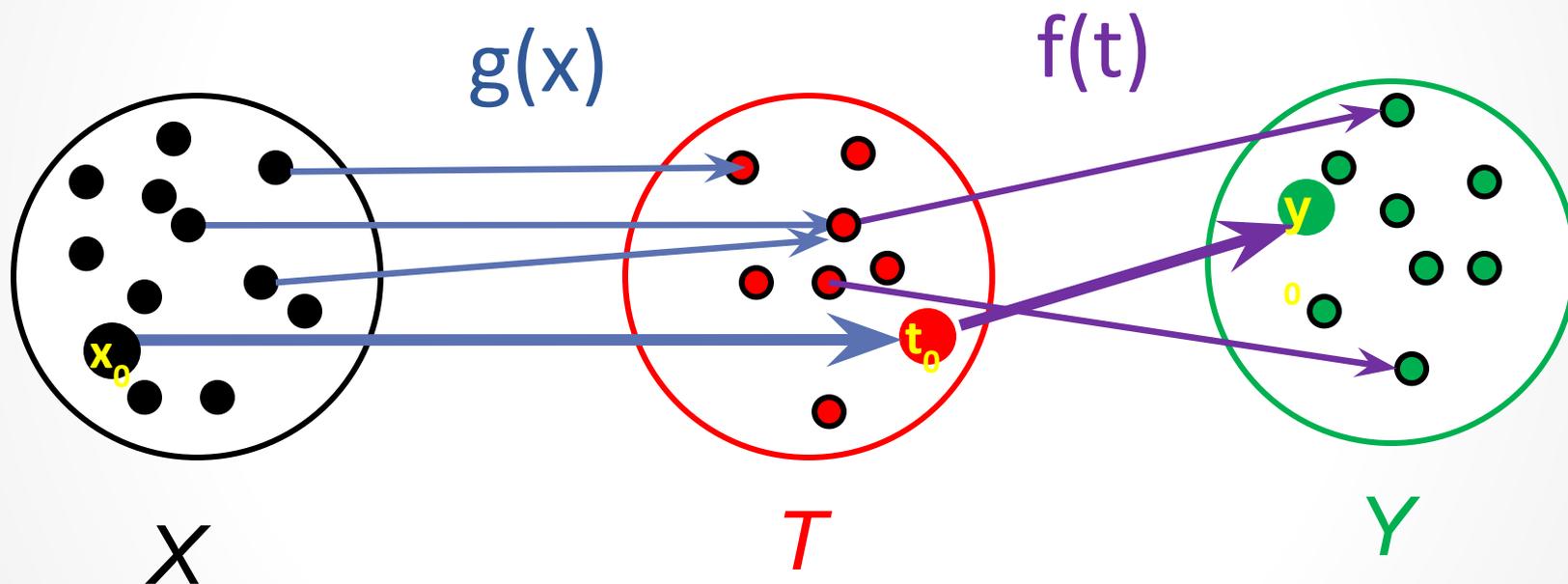
Функция – соответствие между множествами X и Y , при котором каждому элементу первого множества X соответствует не более одного элемента другого множества Y .



$$x_0 \longrightarrow y_0$$

$$y_0=f(x_0)$$

Композиция функций – сложная функция – сложенная функция



$$y = \sqrt{\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$x_0 \longrightarrow t_0 \longrightarrow y_0$$

Формула для задания сложной функции

Пример.

$$y=f(g(x)) -$$

– сложная функция

$g(x)$ – внутренняя функция

$f(t)$ – внешняя функция

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

$g(x) = x^2 - 4$ –
внутренняя функция

$f(t) = \sqrt{t}$ – внешняя функция

Примеры:

$$1) y = (2x + 1)^6$$

Внешняя функция $f = t^6$

Внутренняя функция $t = 2x + 1$

$$2) y = \frac{1}{\sin^2 x}; \quad \frac{1}{\sin^2 x} = (\sin x)^{-2}$$

Внешняя функция $f = t^{-2}$

$$y = (\sin x)^{-2}$$

Внутренняя функция $t = \sin x$

Законы композиции функций

- **Переместительный закон** $f \circ g = g \circ f$
выполняется не для всех функций

- **Сочетательный закон** остается в силе:
 - $[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(h(x)) =$
 - $= f(g(h(x)))$,
 - $[f \circ (g \circ h)](x) = f[(g \circ h)(x)] =$
 - $= f(g(h(x)))$
- **Распределительный закон** распадается на два — из-за отсутствия перестановочного закона:
 - $f \circ (g+h) = (f \circ g) + (f \circ h)$
 - $(g+h) \circ f = (g \circ f) + (h \circ f)$
 - и, что удивительно, один из них выполняется в алгебре функций, а второй — нет.

Функциональные уравнения

Рассмотрим задачи, в которых надо найти функцию, если задано некоторое уравнение, в котором в качестве неизвестной выступает сама функция.

- **Пример 1**

$f(x)$ – нечетная и периодическая с периодом $T = 10$

Найти $f(2015)$, если $f(-5) = 1,5$

Решение:

Используем периодичность функции $f(x)$. Тогда $f(2015) = f(5 + 10 \cdot 201) = f(5)$ Так как $f(x)$ нечетная, то $f(-x) = -f(x) \Rightarrow f(5) = -f(-5) = -1,5$

Ответ: $-1,5$

Решение функциональных

уравнений методом подстановки

• Пример 1

$$f(2x + 1) = x^2. \text{ Найти } f(x)$$

Решение: Введем подстановку.

$$\text{Пусть } 2x + 1 = t, \text{ тогда } 2x = t - 1, x = \frac{t-1}{2}, \quad f(t) = \left(\frac{t-1}{2}\right)^2$$

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$$

• Пример 2

$$f\left(\frac{a+x}{c+x}\right) = kx, \quad x \neq -c \quad a, c, k - \text{ постоянные.}$$

$$\text{Пусть } \frac{a+x}{c+x} = t \quad a+x = (c+x)t$$

$$x - xt = ct - a$$

$$x = \frac{ct - a}{1 - t}$$

Найти $f(x)$

$$f(t) = k \left(\frac{ct - a}{1 - t}\right)$$

$$f(x) = k \left(\frac{cx - a}{1 - x}\right), \text{ где } x \neq 1$$

$a \neq c$

Примеры для самостоятельного решения



1. Известно, что функция $f(x)$ - чётная и $f(-3) = 2$. Найдите значение

$$\frac{f(3) - 3f(-3) + 5f(3)f(-3)}{7f(3) - 4f(-3)}$$

2. Известно, что функция $f(x)$ - нечётная и $f(-2) = 3$. Найдите значение

$$\frac{4f(2) + 5f(-2) - 3f(2)f(-2)}{5f(-2) - f(2)}$$

3. С2(из теста №1 для 10 класса по теме «Функция. Область определения и область значений функции») Известно, что $f(3 - x) = 2x^2 + 3x - 1$. Найдите функцию $f(x)$

4. Известно, что $f(2 - x) = 3x^2 - x + 5$. Найдите функцию $f(x)$

Производная композиции функций

Дана функция $y = U^n$, где $U = f(x)$

Её производная $y' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$

Для доказательства применили метод математической индукции

- $n = 2$, $(U^2)' = (U \cdot U)' = U' \cdot U + U \cdot U' = 2 \cdot U \cdot U'$

- $n = k$, $(U^k)' = k \cdot U^{k-1} \cdot U'$

- $n = k + 1$,

$$(U^{k+1})' = (U^k \cdot U)' = k \cdot U^{k-1} \cdot U' \cdot U + U^k \cdot U' = k \cdot U^k \cdot U' + U^k \cdot U' = U^k \cdot U' \cdot (k + 1) = (k + 1) \cdot U^k \cdot U'$$

- Доказали, что

$$(U^n)' = n \cdot U^{n-1} \cdot U'$$

Другие производные

- $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2 \cdot \sqrt{U}}$

- $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$

- $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$

- $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$

- $(\operatorname{tg} U)' = \frac{U'}{\cos^2 U}$

- $(\operatorname{ctg} U)' = -\frac{U'}{\sin^2 U}$

Правило нахождения производной композиции функций

Производная сложной функции равна произведению
производной внешней функции
на производную внутренней функции

$$1) y = \cos(4x^2 - 3x + 5) \quad \begin{cases} t = 4x^2 - 3x + 5 \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$y' = f' \cdot t'$$

$$\begin{aligned} y' &= (\cos t)' \cdot (4x^2 - 3x + 5)' = -\sin t \cdot (8x - 3) = \\ &= -(8x - 3) \cdot \sin t = (3 - 8x) \cdot \sin t = \\ &= (3 - 8x) \cdot \sin(4x^2 - 3x + 5) \end{aligned}$$

Найти производную функции $y = \operatorname{tg}^2 x$

- Производная от данной функции сначала берется как от степенной, а затем как от тригонометрической функции:
- $y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot (\operatorname{tg} x)'$
- $y' = 2 \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

Применение производной композиции

функций для построения графика

$$y = \sqrt{x^2 - 4}$$

1. Область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$$

Функция четная

$$y(-x) = y(x)$$

$$2. y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$

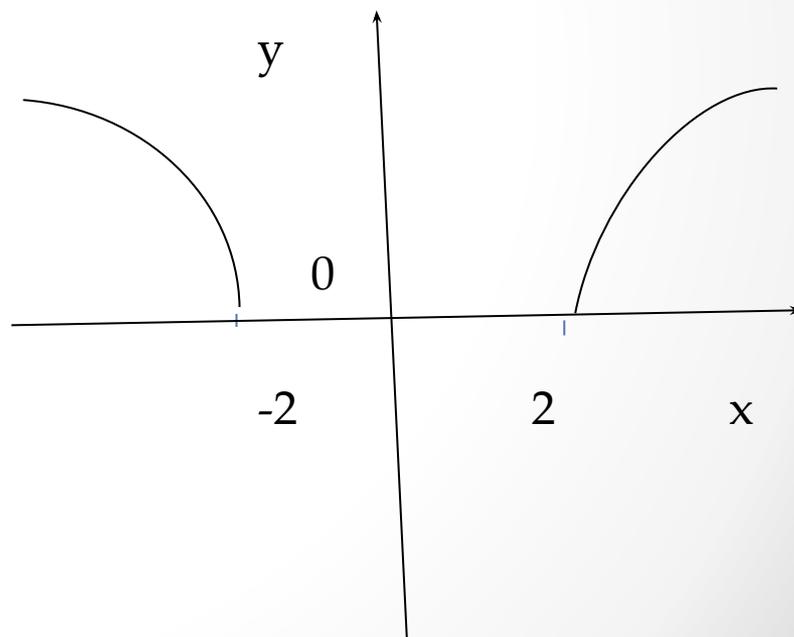
$$D(y') = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

$$y' = 0, x = 0$$

y' не существует

при $x = \pm 2$

x		-2	2	
		--	--	
	↘	0	0	↗



Справочная литература

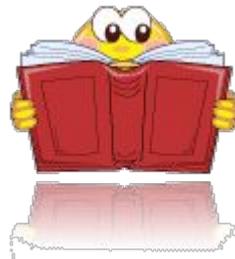
Мордкович А.Г., Смирнова И.М. «Математика (базовый уровень)» 10 кл., 11 кл, издательство «Мнемозина».

Мордкович А.Г. «Алгебра и начала математического анализа 10-11» издательство «Мнемозина»

Колмогоров А.Н. и др. «Алгебра и начала математического анализа 10-11» издательство «Просвещение»

Дополнительную информацию можно найти на сайтах:

1. <http://www.fipi.ru>
2. <http://www.mathege.ru>
3. <http://www.reshuege.ru> ...
4. <http://mon.gov.ru/pro/fgos>



Спасибо за внимание!

