Комплексные числа и координатная плоскость

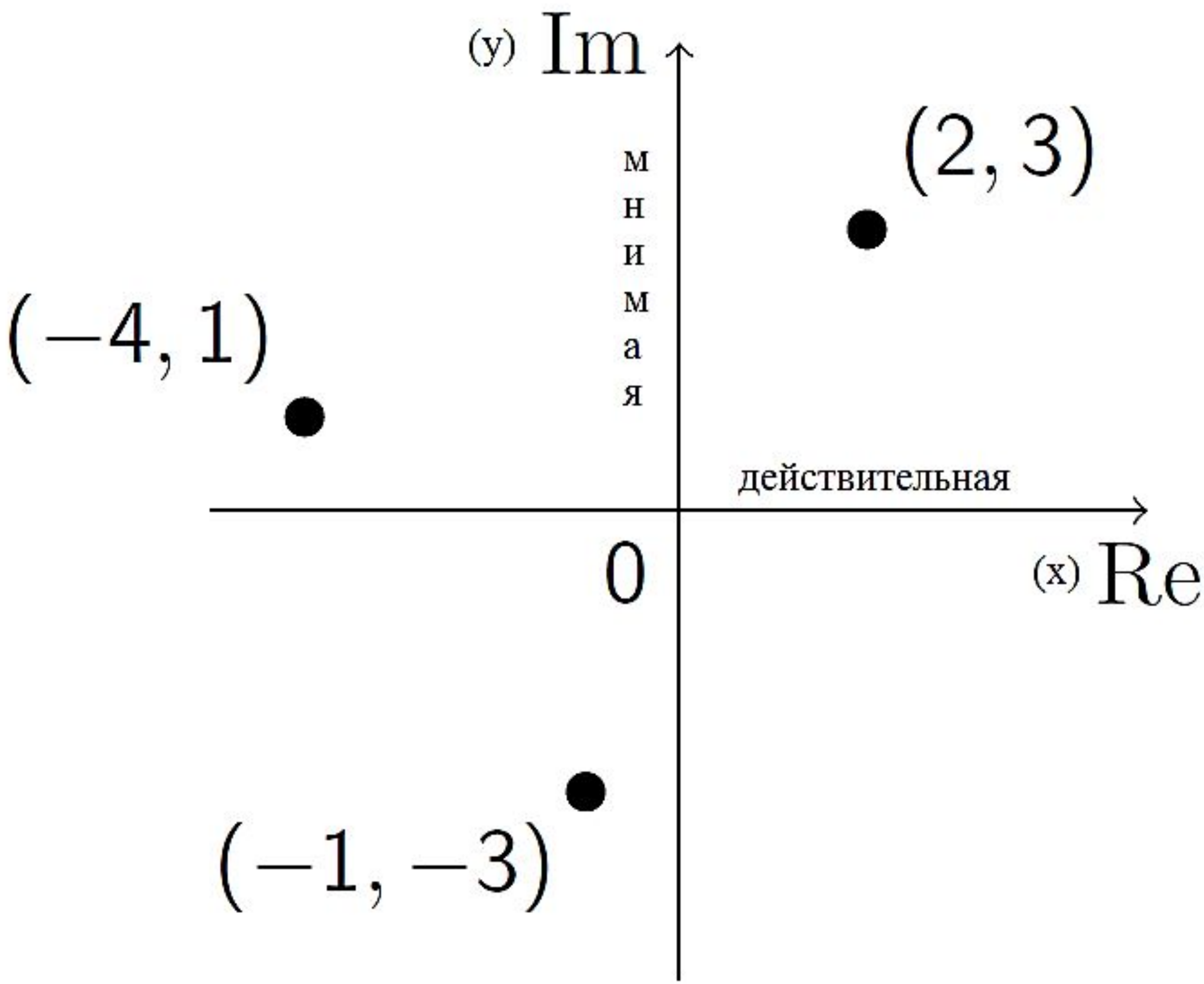
Геометрической моделью множества C является координатная плоскость. Каждому комплексному числу r = a + bi можно естественным образом поставить в соответствие точку (a; b) координатной плоскости.

Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа.

Плоскость, точки которой отождествляются с комплексными числами, называется комплексной плоскостью.

Ось абсцисс называется действительной осью.

Ось ординат называется мнимой осью.

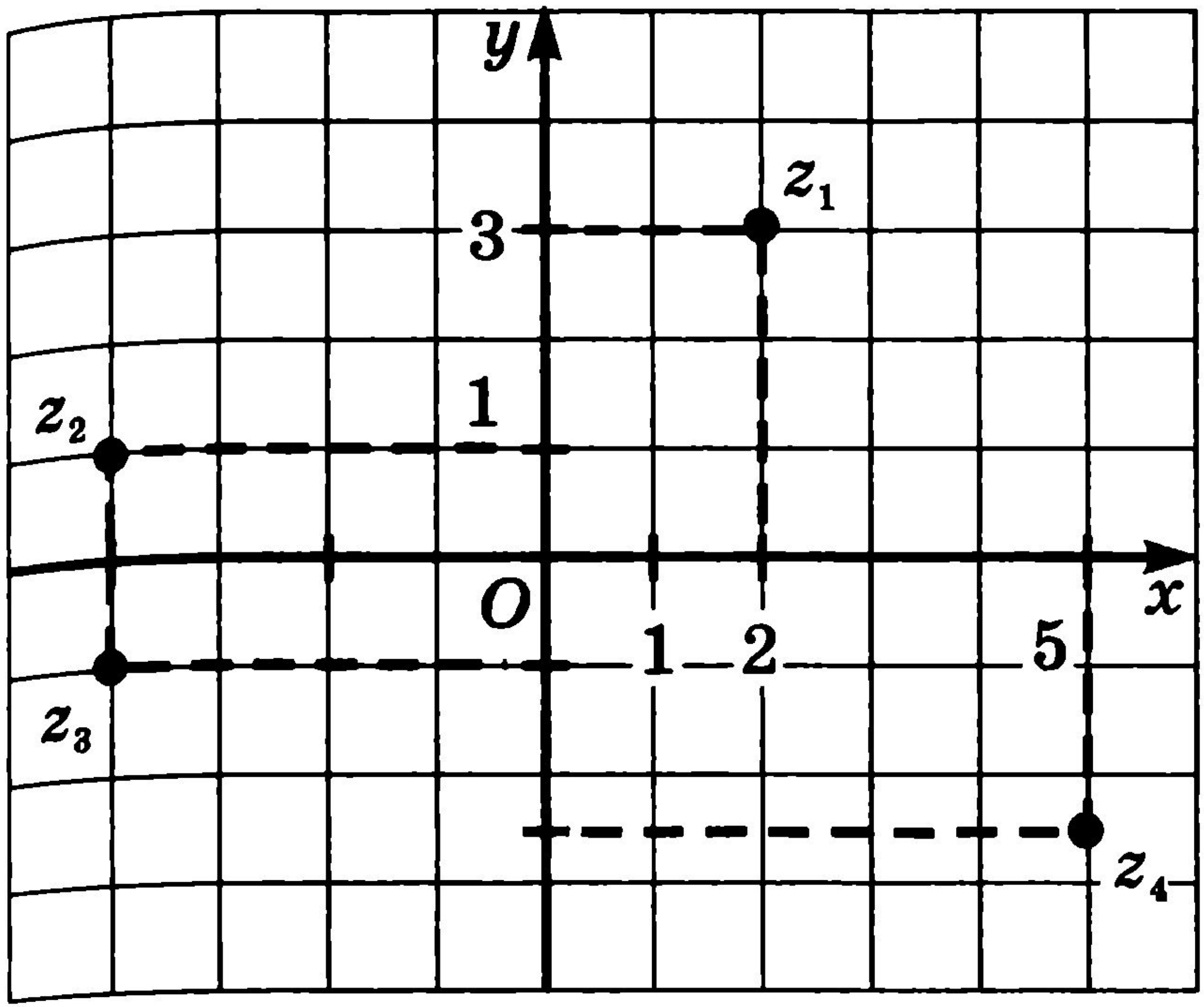


При таком соответствии действительному числу $a = a + 0 \cdot i$ *соответствует точка* $(a; 0)$ *с нулевой ординатой. Значит, действительные числа изображаются точками оси абсцисс.*

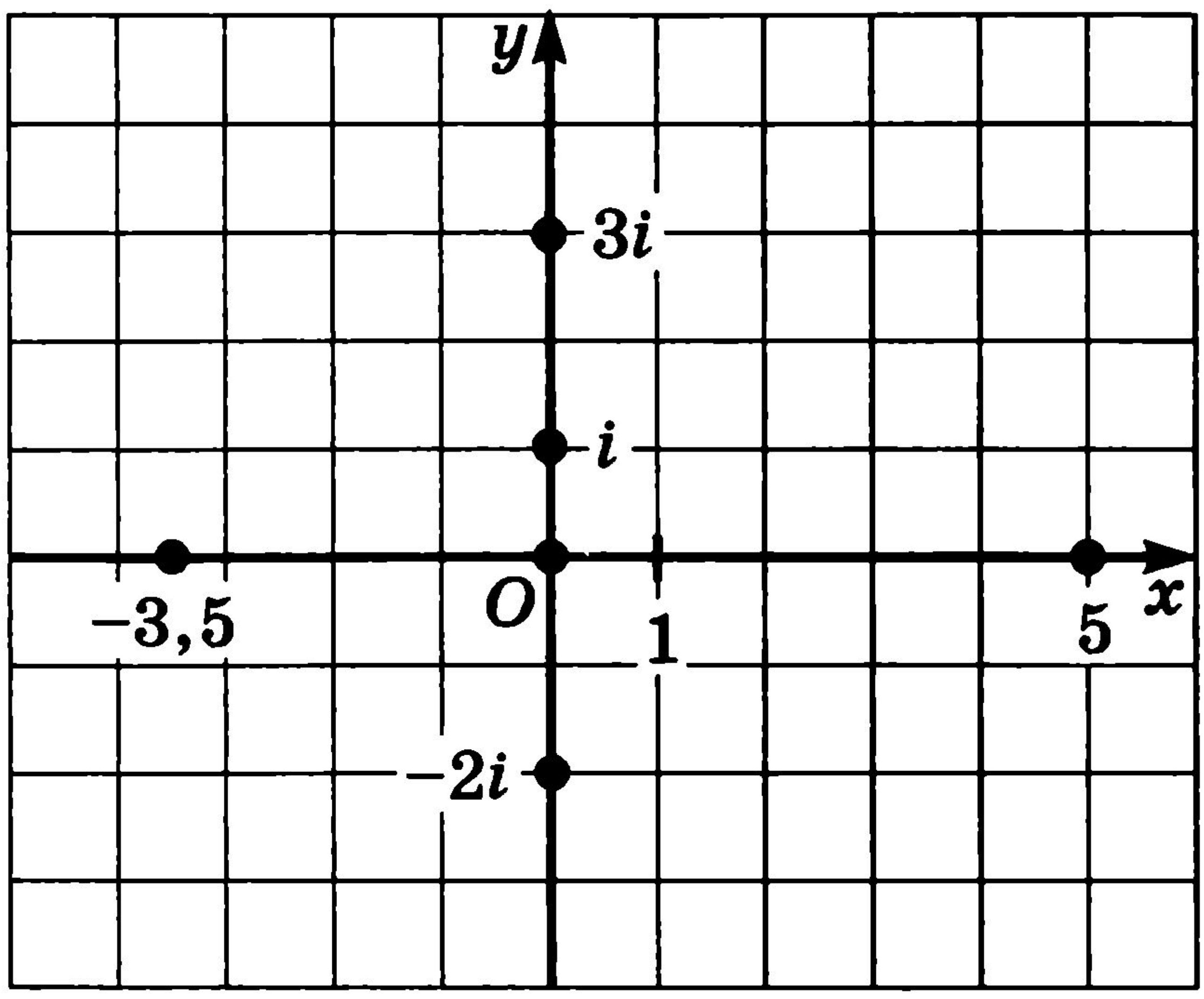
Мнимой единице $i = 0 + 1 \cdot i$ *соответствует точка* $(0; 1)$ *на оси ординат, и вообще точками этой оси будут изображаться все чисто мнимые числа.*

На рисунке отмечены на координатной плоскости комплексные числа:

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = -4 - i$, $z_4 = 5 - 2{,}5i$.



На рисунке отмечены на координатной плоскости некоторые действительные и чисто мнимые числа: 0, 5, -3,5, i, 3i, -2i.



Сумма и произведение пар чисел

Если $z = (a; b)$ и $w = (c; d)$, то

$$z + w = (a; b) + (c; d) = (a + c; b + d)$$

и

$$zw = (a; b) \cdot (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$$

Свойства

ассоциативность:

$$(a; b) + ((c; d) + (e; f)) = ((a; b) + (c; d)) + (e; f),$$
$$(a; b) \cdot ((c; d) \cdot (e; f)) = ((a; b) \cdot (c; d)) \cdot (e; f);$$

коммутативность:

$$(a; b) + (c; d) = (c; d) + (a; b),$$
$$(a; b) \cdot (c; d) = (c; d) \cdot (a; b);$$

дистрибутивность:

$$(a; b) \cdot ((c; d) + (e; f)) = (a; b) \cdot (c; d) + (a; b) \cdot (e; f).$$

То есть, для таким образом определенных суммы и произведения комплексных чисел верны сочетательный, переместительный и распределительный законы. При этом пара (0; 0) будет нулем относительно сложения, а пара (1; 0) будет единицей относительно умножения комплексных чисел.

Пример 1. *Изобразить на координатной плоскости множество всех комплексных чисел, у которых:*

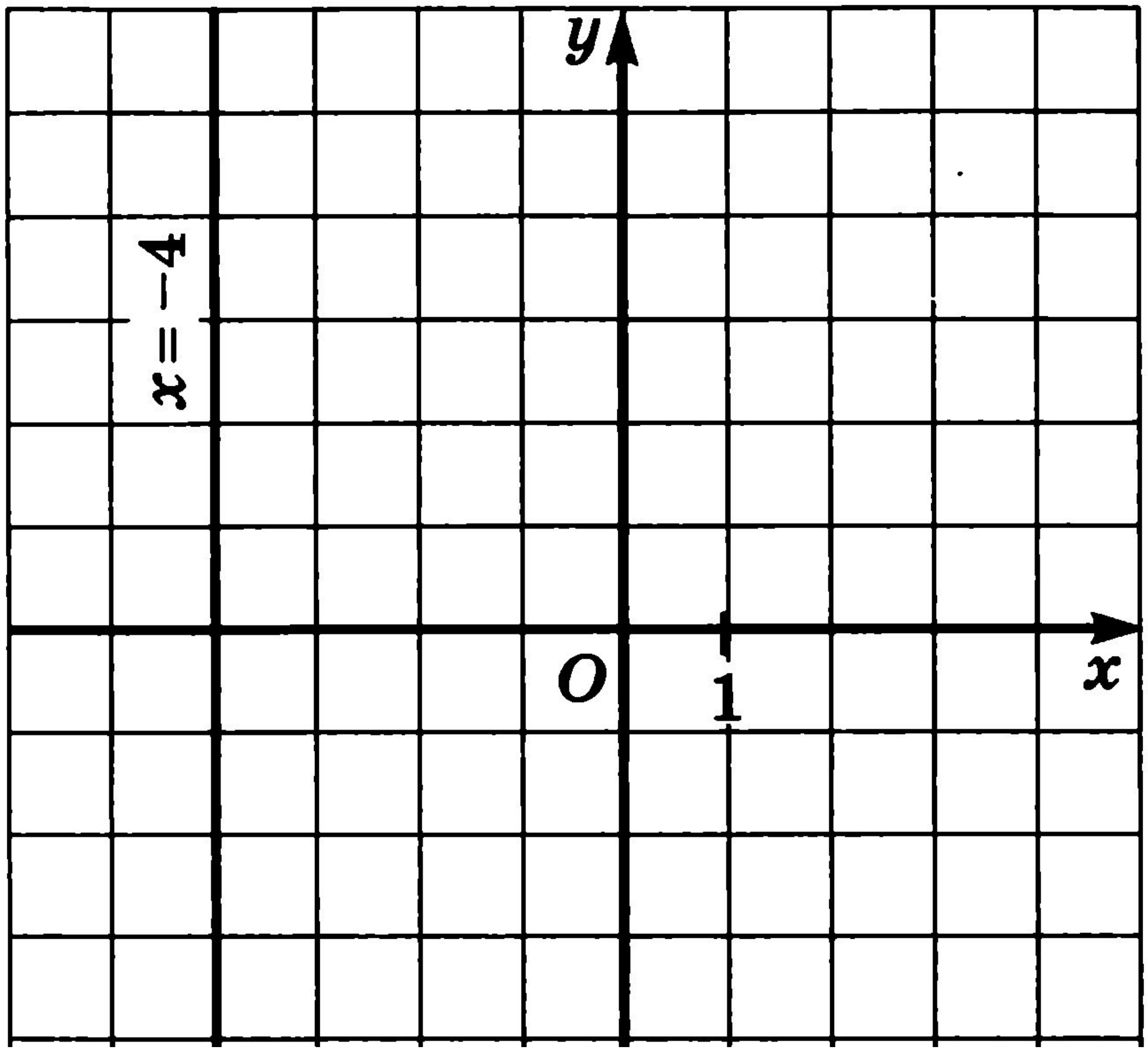
а) действительная часть равна -4;

б) мнимая часть является четным однозначным натуральным числом;

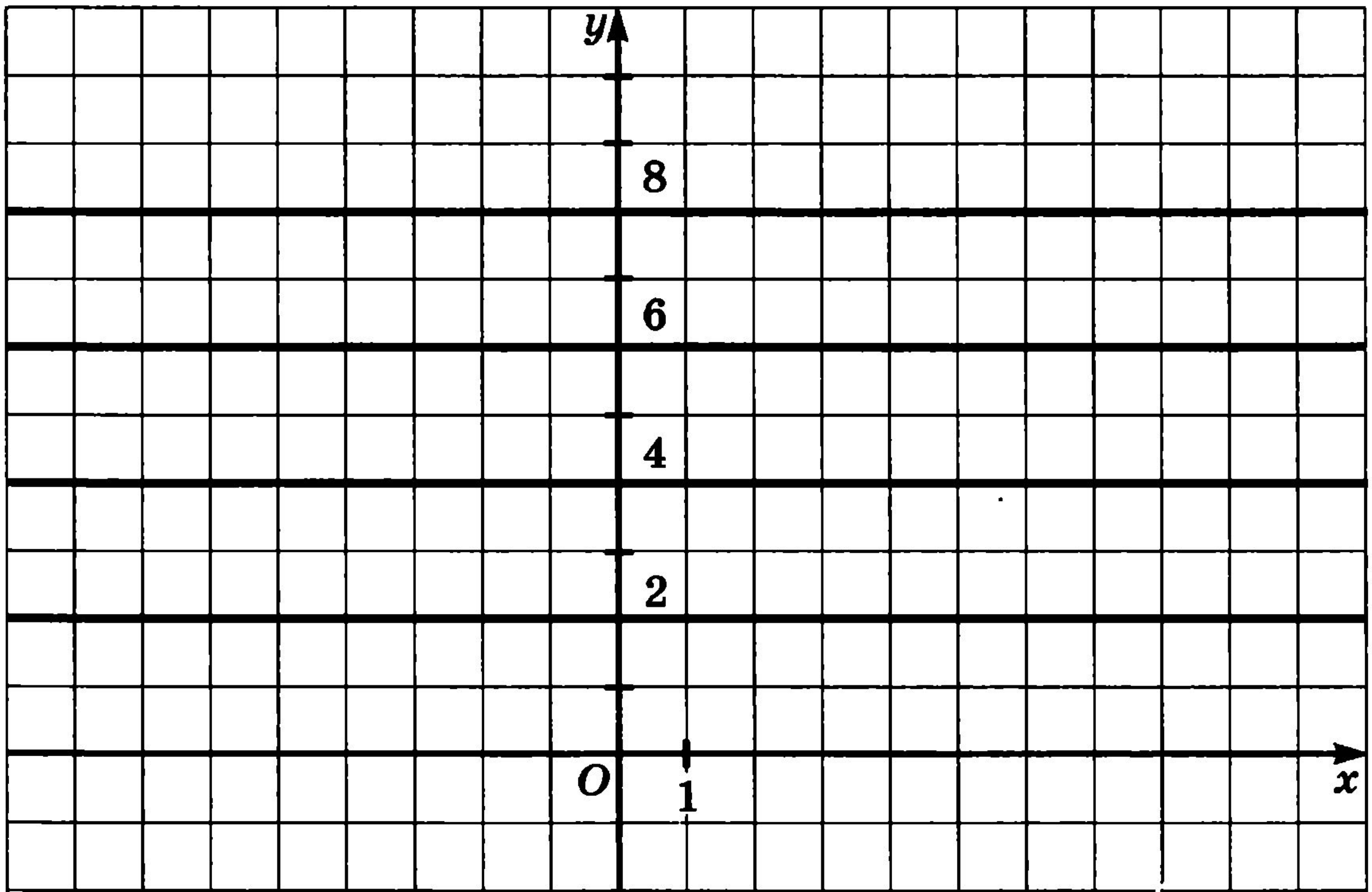
в) отношение мнимой части к действительной равно 2;

г) сумма квадратов действительной и мнимой частей равна 9.

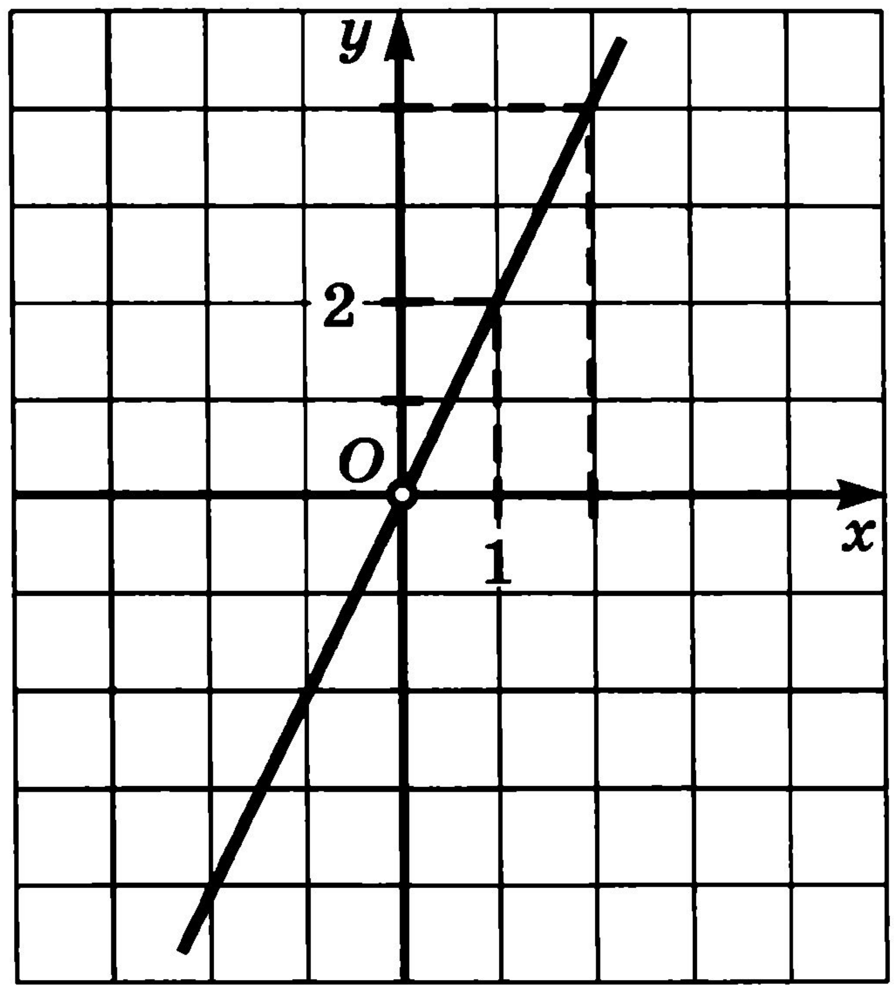
Решение. а) Нас интересуют комплексные числа z = x + yi, у которых x = -4. Это уравнение прямой, параллельной оси ординат.



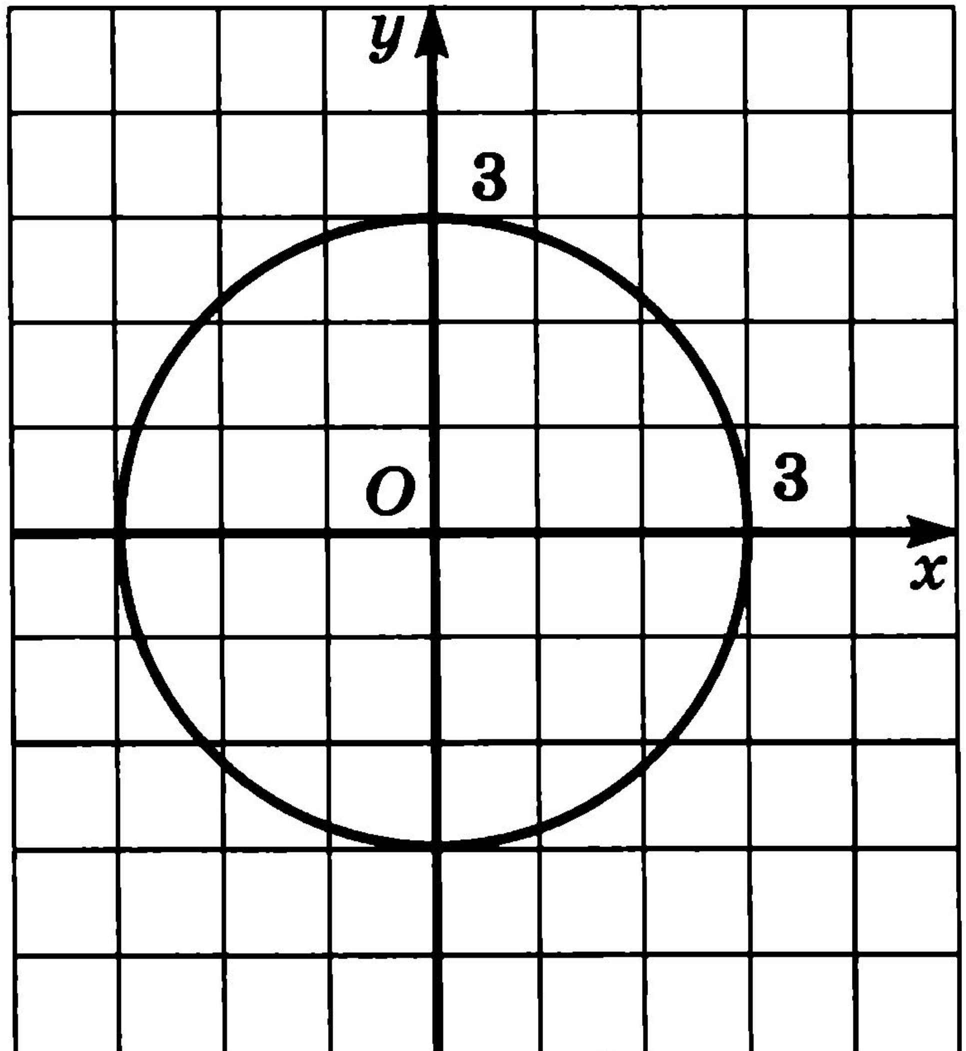
б) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $y = 2, 4, 6$ или 8. Это множество состоит из четырех прямых, параллельных оси абсцисс.



в) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $y/x = 2$, или $y - 2x$, $x \neq 0$. Это прямая, проходящая через начало координат, с выколотой точкой (0; 0)



г) Нас интересуют комплексные числа $z = x + yi$, у которых $x^2 + y^2 = 9$. Это окружность радиусом 3 с центром в начале координат.

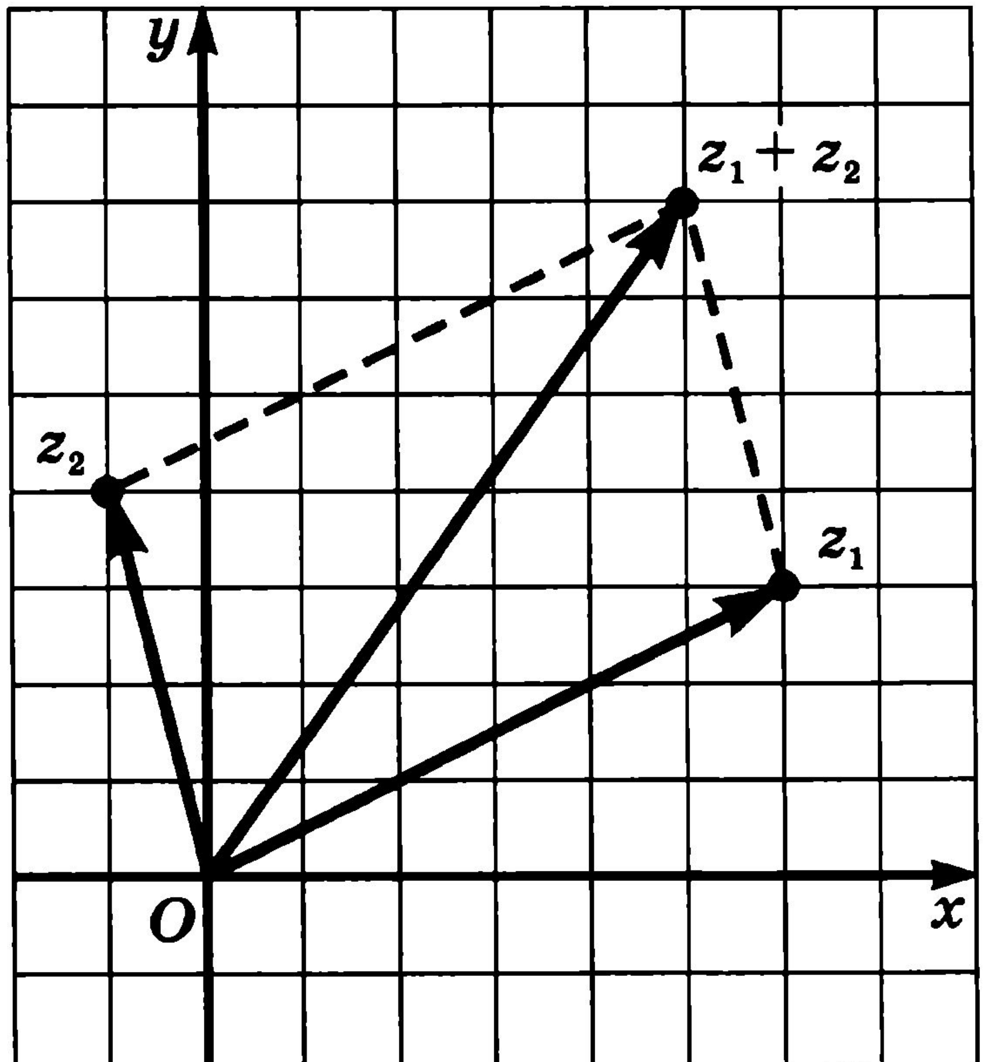


Любую точку на координатной плоскости можно воспринимать двояко: алгебраически, как упорядоченную пару (a; b) действительных чисел, и как вектор с началом в точке (0; 0) и концом в точке (a; b). При векторном подходе к изображению комплексных чисел наглядный смысл получают операции сложения и вычитания двух комплексных чисел:

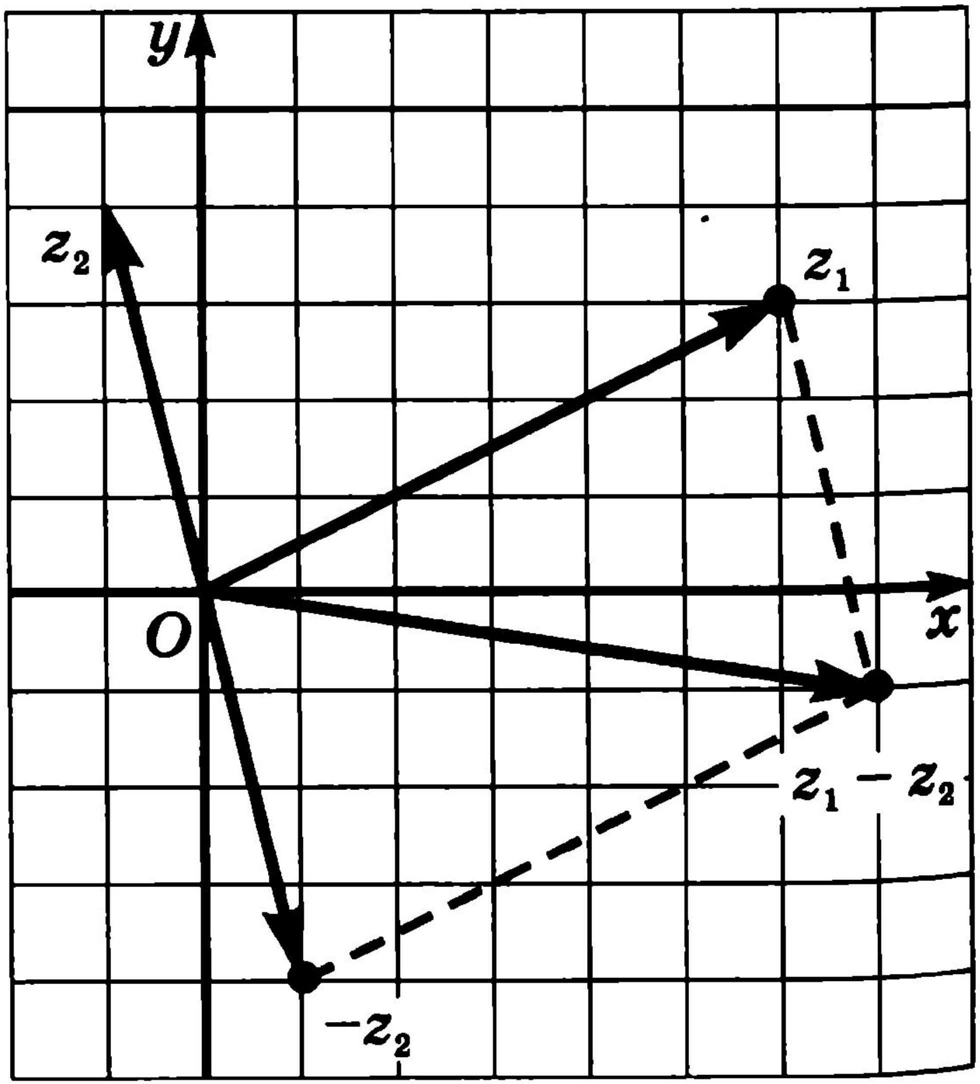
а) вектор, соответствующий сумме $z_1 + z_2$ *двух комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2*;*

б) вектор, соответствующий разности $z_1 - z_2$ *двух комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих числам* z_1 *и* z_2*.*

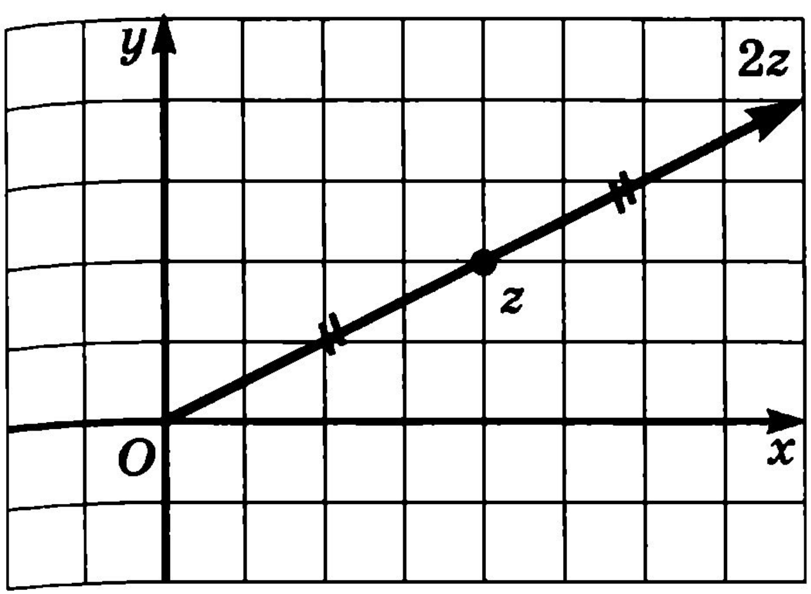
а) вектор, соответствующий сумме $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих числам z_1 и z_2

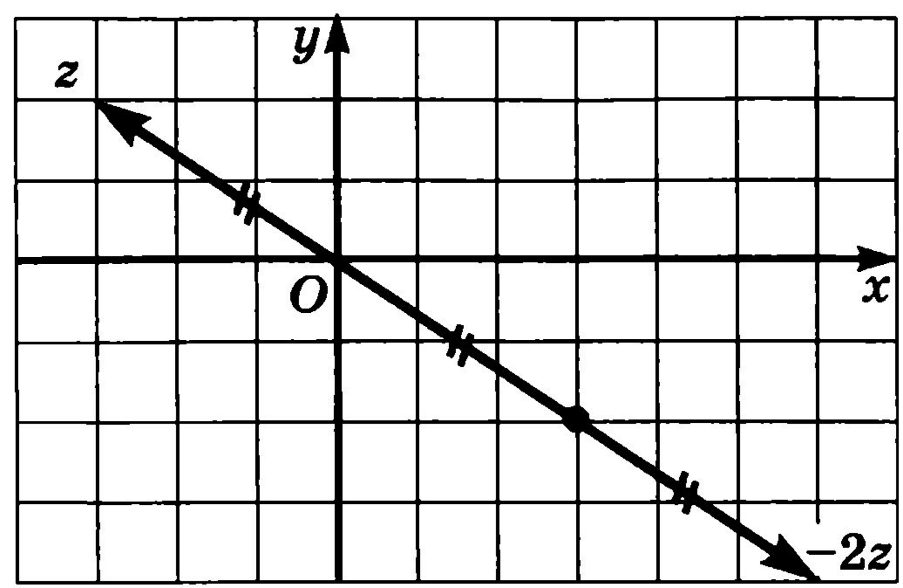


б) вектор, соответствующий разности $z_1 - z_2$ двух комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих числам z_1 и z_2.



Точно так же дело обстоит и с умножением комплексных чисел на действительные числа: вектор, соответствующий произведению $k \cdot z$ действительного числа k на комплексное число z, равен произведению вектора, соответствующего числу z, на число k.





Пример 2. Для комплексных чисел $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -1 + 2i$ изобразить на координатной плоскости числа:

а) $2z_1$;

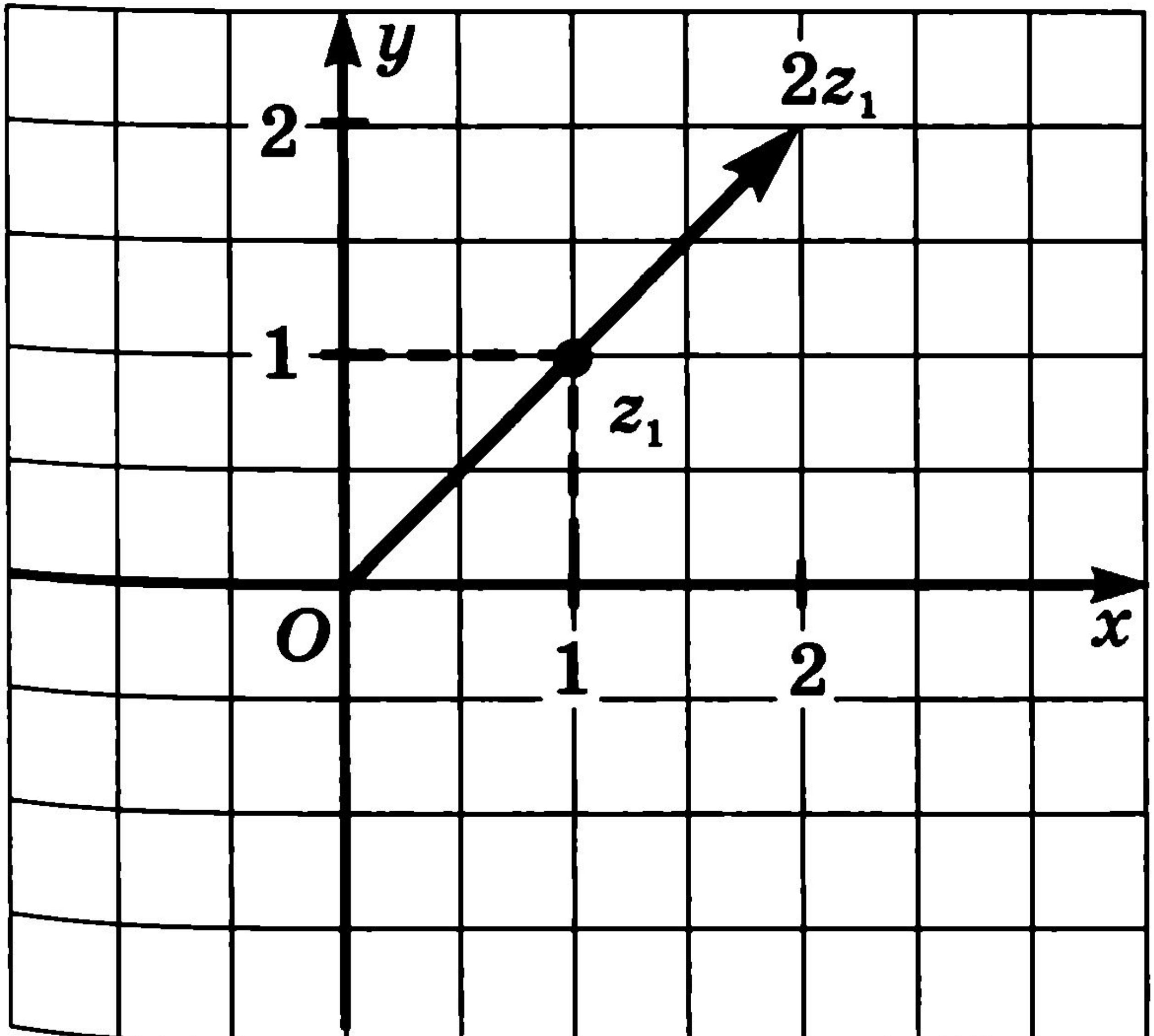
б) $-3z_2$;

в) z_1+z_2;

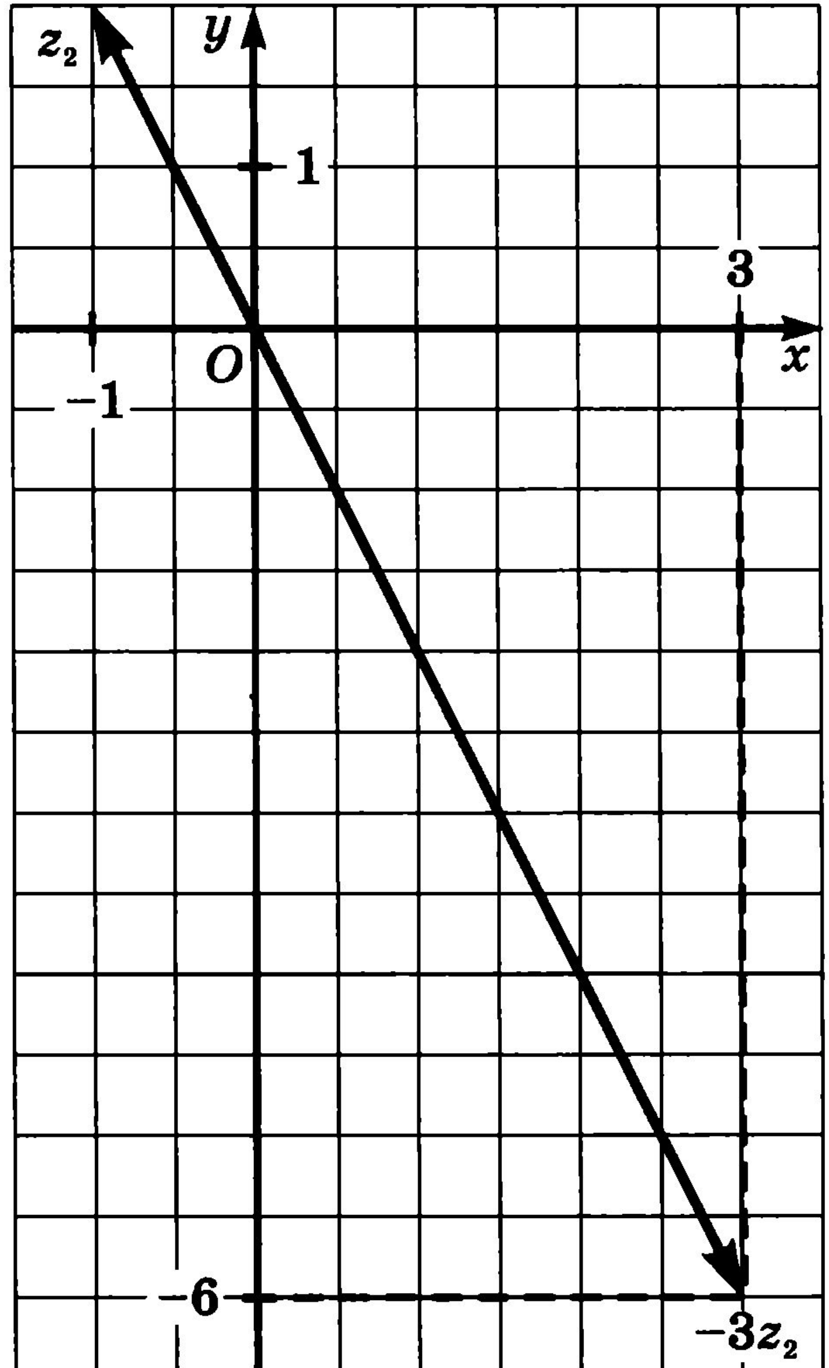
г) $2z_1 - z_2$.

Решение.

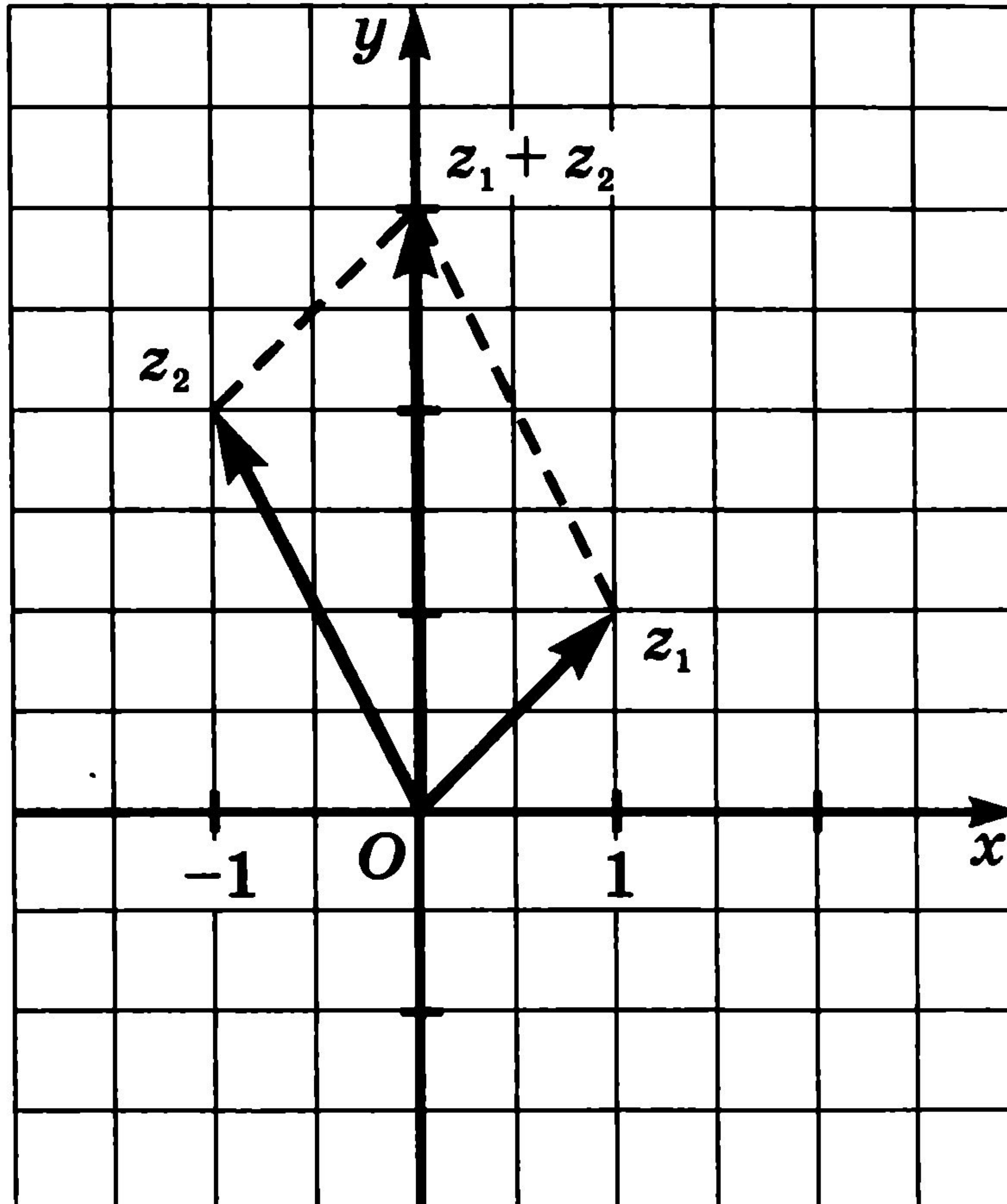
а) $2z_1$;



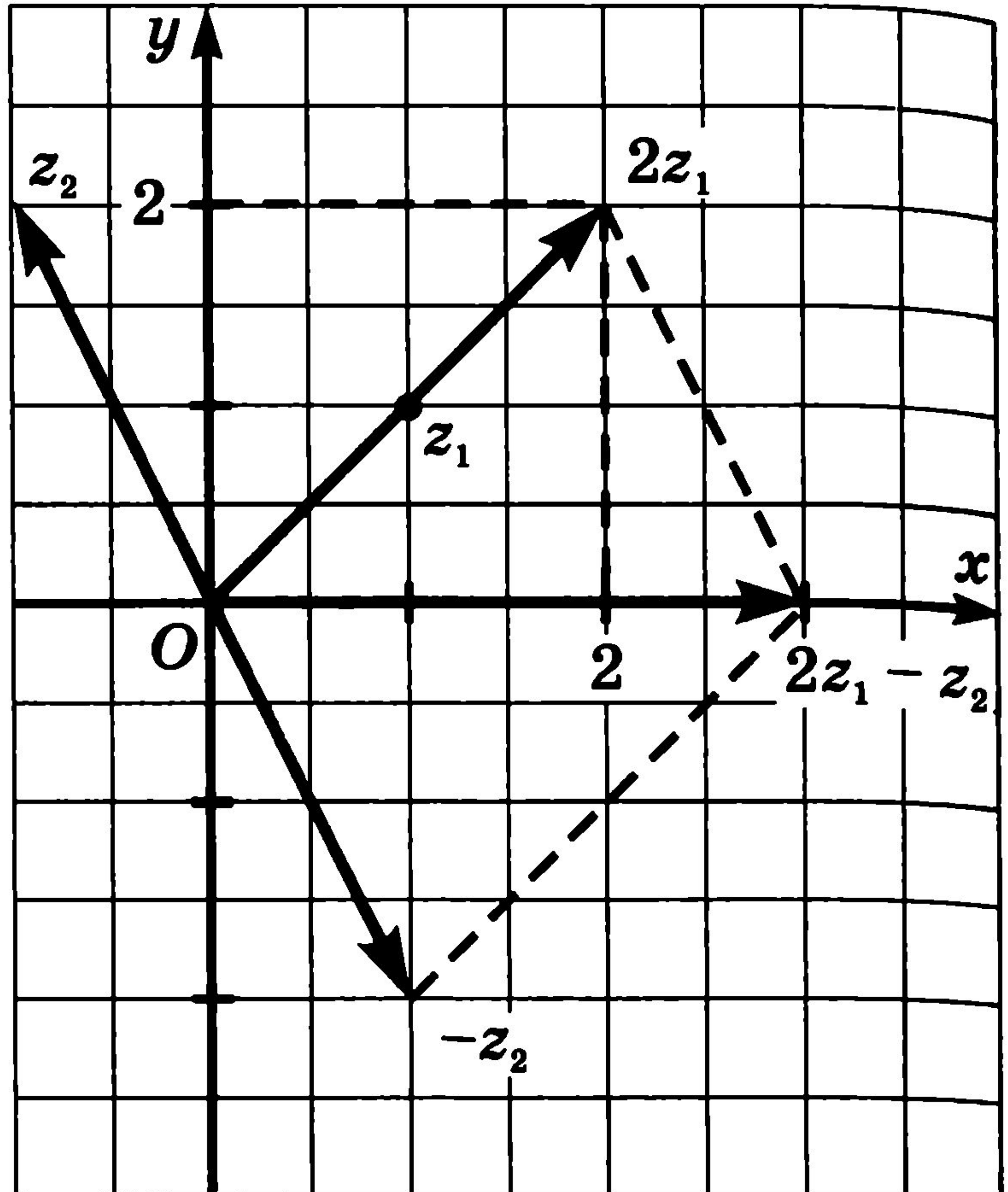
б) $-3z_2$



в) z_1+z_2;



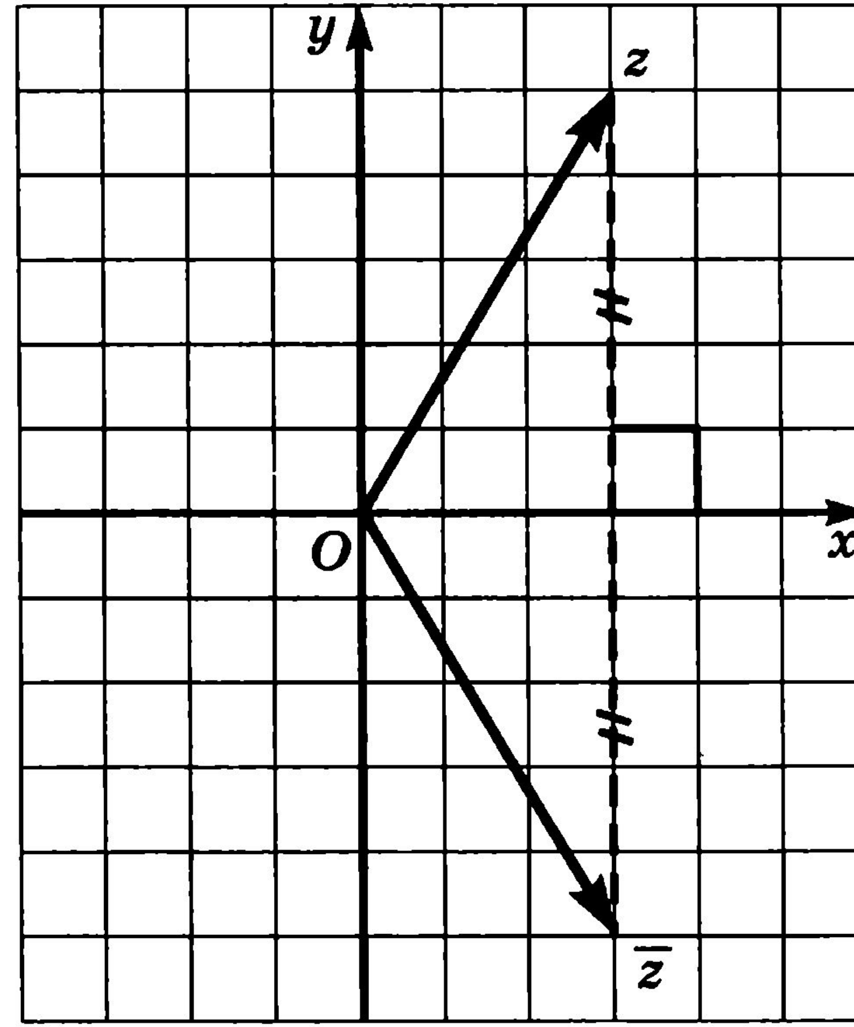
г) $2z_1 - z_2$.



Числа в заданиях можно найти по формулам, а затем изобразить их на координатной плоскости.

Иногда приведенные правила для сложения, вычитания комплексных чисел и умножения комплексных чисел на действительные числа объединяют таким образом: во множестве комплексных чисел операции сложения, вычитания и умножения на действительные числа производятся покоординатно. Подчеркнем, что сама эта формулировка предполагает операции уже не с самими комплексными числами, а с их геометрическими, векторными представениями.

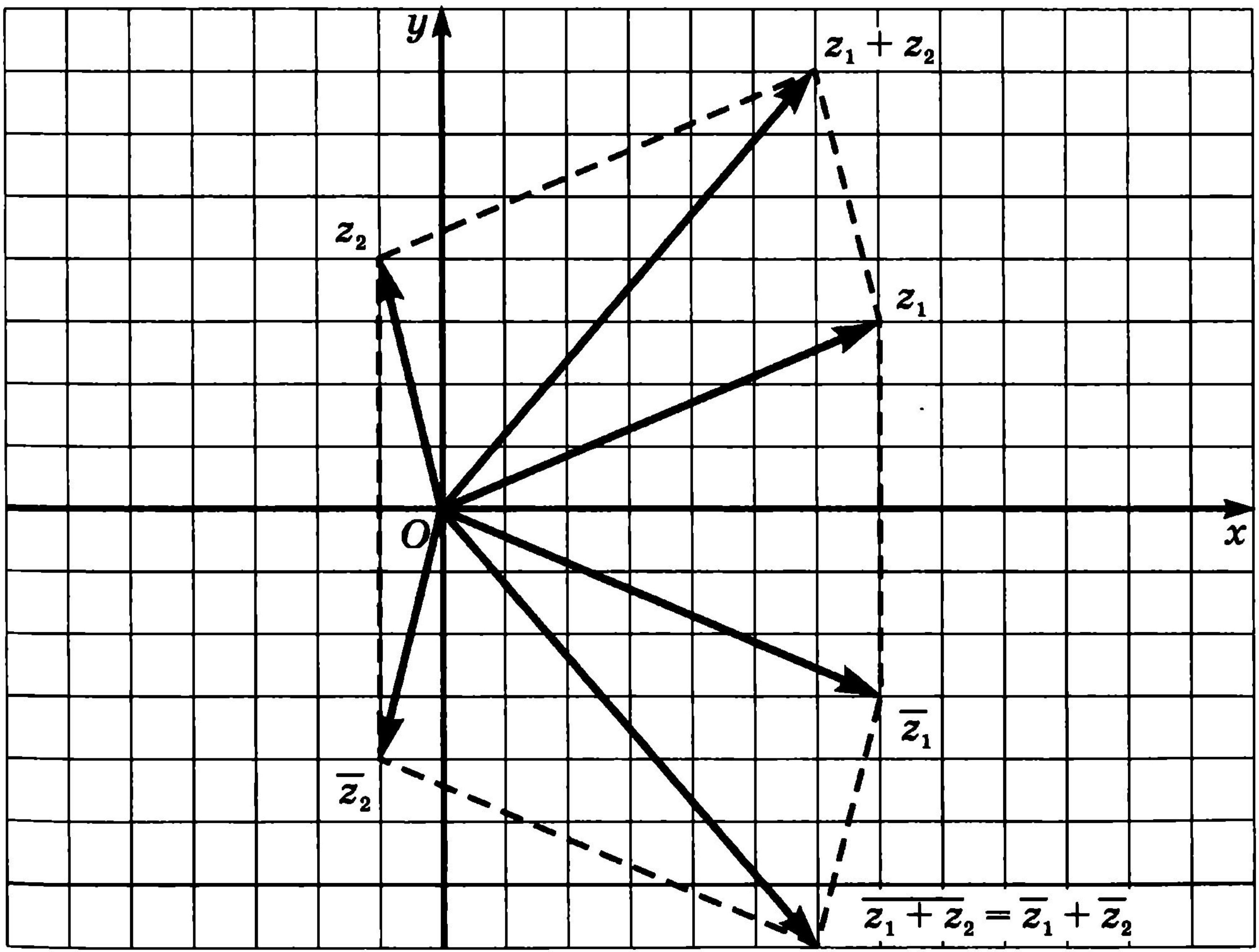
В координатной плоскости ясный геометрический смысл имеет операция сопряжения (перехода к сопряженному числу). Действительно, если изобразить комплексные числа $z = x + yi$ и $\bar{z} = x - yi$ на координатной плоскости, то получатся точки (x; y) и (x; -y) симметричные относительно оси абсцисс.



- *Сопряженные друг другу комплексные числа равноудалены от начала координат, а вектора изображающие их, наклонены к оси абсцисс под одинаковыми углами, но расположены по разные стороны от этой оси.*

Сложим, например, «по правилу параллелограмма» комплексные числа z_1 *и* z_2*, а затем отразим и их, и весь параллелограмм симметрично относительно оси абсцисс.*

Получим: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2$.



y
$z_1 + z_2$
z_2
z_1
O
x
$\overline{z_1}$
$\overline{z_2}$
$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

Итак, мы познакомились с геометрической моделью множества C комплексных чисел и с тем, как в этой модели выглядят некоторые арифметические операции над комплексными числами. Оказалось, что модель эта — привычная нам координатная плоскость, а операции в точности совпадают с векторными операциями сложения, вычитания и умножения на действительное число. Пока что ничего принципиально нового мы не увидели. Чтобы различать координатную плоскость саму по себе и координатную плоскость как модель множества комплексных чисел, принято в последнем случае говорить о комплексной плоскости.