Комплексные числа

Комплексным числом называется

число вида

$$z = x + y \cdot i,$$

где x и y – вещественные числа.

$$z = x + iy$$

называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Число x называется действительной частью, y–мнимой частью комплексного числа z.

Это записывают следующим образом:

$$x = \operatorname{Re} z, \qquad y = \operatorname{Im} z.$$

- Если $x = 0$, то число z называют чисто мнимым.

- Если $y = 0$, то получается $z = x + 0 \cdot i$ вещественное число.

- Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны друг другу, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$; комплексное число *z* считается равным нулю, если x=y=0.

Всякое комплексное число можно изобразить точкой на плоскости, т.к. каждому z соответствует упорядоченная пара вещественных чисел $(x;y)$.

Модуль комплексного числа

Число $\sqrt{x^2 + y^2}$ называется модулем комплексного числа $z = x + iy$ и обозначается $|z|$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

$$z = r\left(\sin\varphi + i\sin\varphi\right)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$$

Показательная форма комплексного числа

$$z = r \cdot e^{\varphi \cdot i}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = arctg\left(\frac{y}{x}\right)$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \cdot i$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) \cdot i$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + i^2 y_1 y_2 =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i$$

Действия над комплексными числами

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 + iy_1 x_2 - ix_1 y_2 - i^2 y_1 y_2}{x_2{}^2 + y_2{}^2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(-x_1 y_2 + x_2 y_1)}{x_2{}^2 + y_2{}^2}$$

Действия над комплексными числами

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1} r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2} = r_1 r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_1\cdot\varphi_2}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{i\cdot\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\cdot\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\cdot(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\cdot\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\cdot\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\cdot\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

Формулы Муавра

$$z^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$