КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

ВВЕДЕНИЕ

Комплексные числа

Глава 16. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Комплексные числа возникают в связи с задачей решения квадратных уравнений. Так, оставаясь в множестве действительных чисел, невозможно решить квадратное уравнение, дискриминант которого меньше нуля.

Комплексные числа необходимы в различных приложениях математики. В частности, теория функций комплексной переменной является действенным инструментом при использовании математических методов в различных областях науки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа, i — мнимая единица.

Число x называется ***действительной частью*** числа z и обозначается $\text{Re}(z)$ (от франц. *reele* — "действительный"), а число y — мнимой частью числа z и обозначается $\text{Im}(z)$ (от франц. *imaginaire* — "мнимый"), т.е. $x = \text{Re}(z)$, $y = \text{Im}(z)$.

Действительное число x является частным случаем комплексного $z = x + iy$ при $y = 0$. Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными, т.е. при $y = 0$, называются ***мнимыми***, а при $x = 0$ $y \neq 0$, т.е. числа вида $z = iy$ — ***чисто мнимыми***.

Числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются ***сопряженными***.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются ***равными***, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $z_1 = z_2$, если $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$, $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$. В частности $z = 0$, если $\text{Re}(z) = 0$ и $\text{Im}(z) = 0$.

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. Сумма (разность) комплексных чисел

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \qquad (16.1)$$

2. Произведение комплексных чисел

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (16.2)$$

В частности

$$i^2 = (0 + i1)(0 + i1) = (0 - 1) + i(0 + 0) = -1,$$

т.е. *мнимая единица есть число, квадрат которого равен* -1.

3. Деление двух комплексных чисел

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \qquad (16.3)$$

Нетрудно убедиться в том, что все арифметические операции (16.1) – (16.3) над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, если считать $i^2 = -1$. Например, произведение комплексных чисел (16.2) есть

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Комплексные числа

ПРИМЕР

▷**Пример 16.1.** Даны комплексные числа $z_1 = 12 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$. **Найти** $z_1 \pm z_2$, $z_1 z_2$, z_1/z_2.

Р е ш е н и е. $z_1 + z_2 = (12 + 5i) + (3 - 4i) = 15 + i$,

$$z_1 - z_2 = (12 + 5i) - (3 - 4i) = 9 + 9i.$$

$$z_1 z_2 = (12 + 5i)(3 - 4i) = 36 + 15i - 48i - 20i^2 = 56 - 33i$$

(учли, что $i^2 = -1$).

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{12+5i}{3-4i}$. Умножая числитель и знаменатель на сопряженное делителю комплексное число $3 + 4i$, получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(12+5i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{36+15i+48i+20^2_i}{9-16^2_i} =$$

$$= \frac{16 + 63i}{25} = 0{,}64 + 2{,}52i. ▶$$

Геометрическое изображение

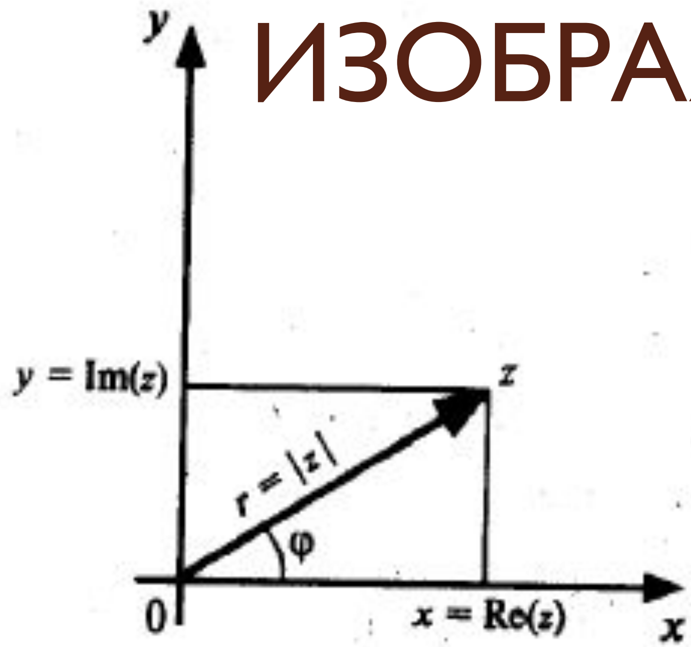

Рис. 16.1

Если для геометрического изображения действительных чисел используются точки числовой прямой, то для изображения комплексных чисел служат **точки координатной плоскости** Oxy.

Плоскость называется *комплексной*, если каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $z(xy)$, причем это соответствие взаимно однозначное (рис. 16.1).

Оси Ox и Oy, на которых расположены действительные числа $z = x + 0i = x$ и чисто мнимые числа $z = 0 + iy = iy$, называются соответственно *действительной и мнимой осями*.

Комплексные числа

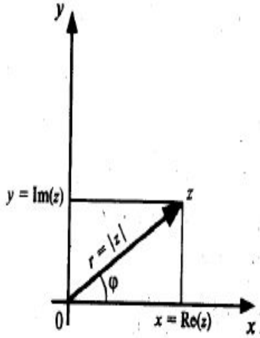

Рис. 16.1

16.2. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $z\,(x,y)$ комплексной плоскости связан *радиус-вектор* этой точки $\vec{Oz}$, длина которого r называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$ (см. рис. 16.1):

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (16.4)$$

Угол φ, образованный радиусом-вектором $\vec{Oz}$ с осью Ox, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\operatorname{Arg} z$. Из значений $\varphi=\operatorname{Arg} z$ выделяется главное значение $\arg z$, удовлетворяющее условию $-\pi<\arg z\le\pi$. Например, $\arg 5=0$, $\arg(-3i)=-\pi/2$, $\arg(1-i)=-\pi/4$.

Очевидно (см. рис. 16.1), что

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi. \qquad (16.5)$$

Следовательно, комплексное число $z=x+iy$ можно представить как

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (16.6)$$

Представление комплексного числа в виде (16.6), где $r=|z|\ge 0$, $\varphi=\operatorname{Arg} z$, называется *тригонометрической формой комплексного числа.*

Комплексные числа

1. *При сложении (вычитании) комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.*

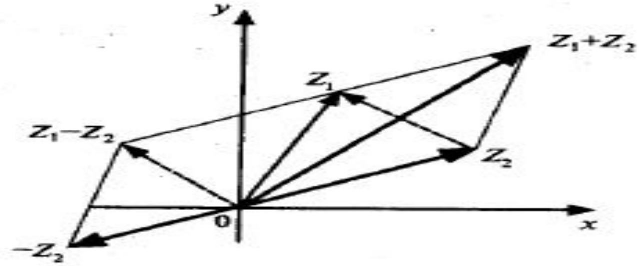

Рис. 16.2

На рис. 16.2 показаны радиусы-векторы комплексных чисел z_1 и z_2, их суммы $z_1 + z_2$ и разности $z_1 - z_2$.

2. *Модуль произведения (частного) двух комплексных чисел равен произведению (частному) модулей этих чисел, а его аргумент — сумме (разности) аргументов этих чисел,* т.е.

если $z = z_1 z_2$, то $|z| = r_1 r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 + \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2; \qquad \textbf{(16.7)}$$

если $z = \dfrac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$, то $|z| = \dfrac{r_1}{r_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(r_2 = |z_2| \neq 0)$,

$$\operatorname{Arg} z = \varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2. \qquad \textbf{(16.8)}$$

Геометрически умножение числа z_1 на z_2 означает изменение длины радиуса-вектора r_1 (или r_2) в r_2 (или r_1) раз и его поворот вокруг точки O против часовой стрелки на угол φ_2 (или φ_1).

Комплексные числа

▷**Пример 16.2.** Комплексные числа $z_1 = -1+i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$ представить в тригонометрической форме и найти $z_1 z_2$ и z_1/z_2.

Решение. По формуле (16.4) найдем модуль комплексного числа z_1: $r_1 = |z_1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$, а из соотношений (16.5) $\cos\varphi = -1/\sqrt{2}$, $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$ получим аргумент числа z_1 (берем его главное значение): $\varphi_1 = \arg z_1 = 3\pi/4$, т.е. $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

Аналогично $r_2 = |z_2| = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1} = 2$, $\cos\varphi_2 = \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi_2 = 1/2$,

т.е. $\varphi_2 = \arg z_2 = \pi/6$ и $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Комплексные числа

Теперь по формулам (16.7) и (16.8)

$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\cdot 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

Комплексные числа

Так как в соответствии с формулами (16.7) и (16.8) при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются, легко получить формулу в о з в е д е н и я комплексного числа в н а т у р а л ь н у ю с т е п е н ь n, известную как *формула Муавра:*

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad \textbf{(16.9)}$$

▷**Пример 16.3.** Найти $(-1+i)^{20}$.

Р е ш е н и е. В примере **16.2** мы получили, что $-1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. Поэтому по формуле Муавра (16.9)

$$(-1+i)^{20} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{20} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left[\cos\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{3\pi}{4}\right)\right] =$$

$$= 1024(\cos 15\pi + i\sin 15\pi) = 1024(-1+0i) = -1024. \blacktriangleright$$

Комплексные числа

Пусть

$$\sqrt[n]{z}=\rho(\cos\psi+i\sin\psi).$$

Тогда, используя определение корня и формулу Муавра (16.9), получим

$$z=[\rho(\cos\psi+i\sin\psi)]^n=\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)$$

или

$$r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi).$$

Отсюда следует, что

$$\rho^n=r \text{ и } n\psi=\varphi+2\pi k, \text{ где } k\in Z.$$

Итак, $\rho=\sqrt[n]{r}$ и $\psi=\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}$, $k\in Z$, т.е.

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad \textbf{(16.10)}$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

При $k=n, n+1, \ldots$ значения корня уже будут повторяться.

Таким образом, *корень n-ой степени из комплексного числа (не равного нулю) имеет n различных значений.*

Комплексные числа

▷**Пример 16.4.** Найти $\sqrt[3]{-1+i}$.

Р е ш е н и е. В примере **16.2** было получено $z=-1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. По формуле (16.10)

$$\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/4+2\pi k}{3}\right),\quad k=0,1,2,$$

откуда получаем три значения корня

$$z_1=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right),$$

$$z_2=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right),$$

$$z_3=\left(\sqrt[3]{1+i}\right)_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right).$$