

ПЗ 1. Комплексные числа

Комплексные числа в алгебраической форме

$$\boxed{i^2 = -1} \text{ — мнимая единица}$$

$$\boxed{z = a + bi} \text{ — алгебраическая форма комплексного числа}$$

$a \in \mathbb{R}$ — и $b \in \mathbb{R}$ — **действительная** и **мнимая части**.

и $a = 0$, то число **(чисто) мнимое**; если $b = 0$, то число **действительное**.

$$\boxed{\bar{z} = a - bi} \text{ — комплексно сопряженное с числом } z = a + bi.$$

Пусть $z = a_1 + b_1 i$ и $w = a_2 + b_2 i$ — два комплексных числа. Тогда

$$z + w = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i,$$

$$z \cdot w = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i,$$

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \overline{w}}{w \cdot \overline{w}} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

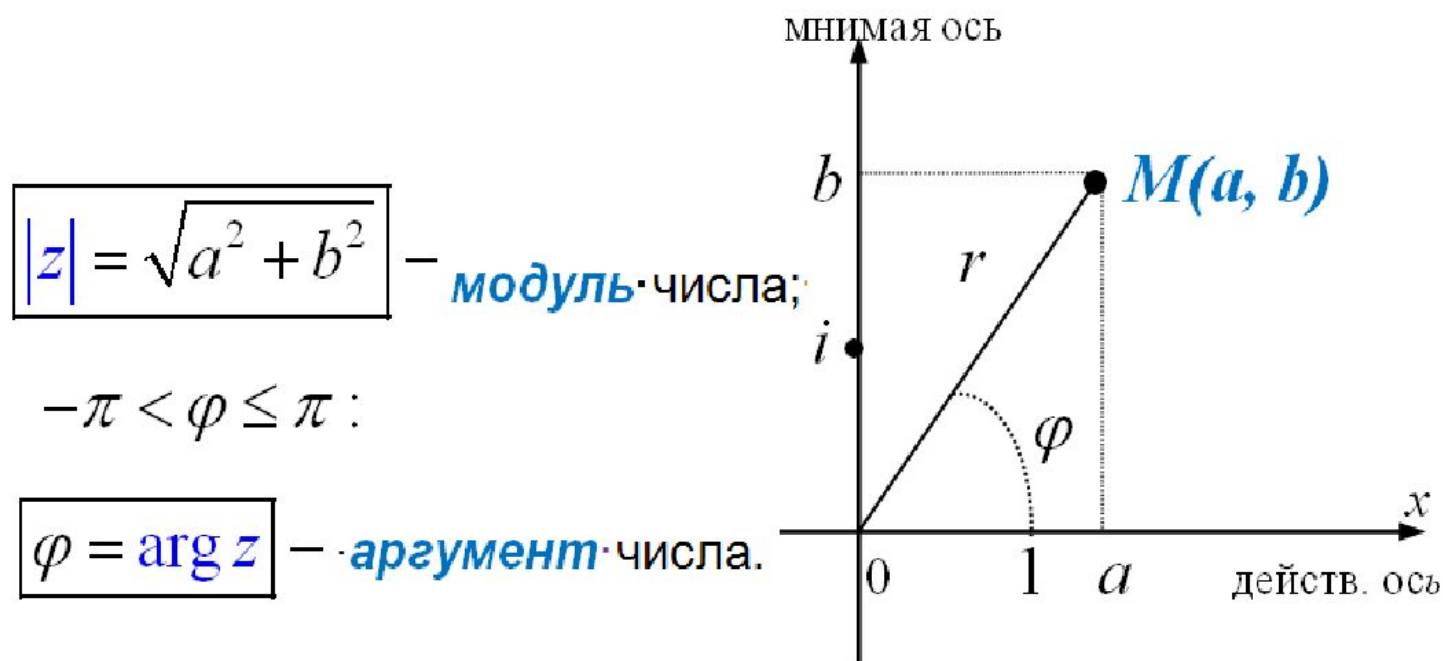
Важно: $\boxed{z \cdot \overline{z}} = (a + bi) \cdot (a - bi) = \boxed{a^2 + b^2}$

Задача 1

07. Пусть $z_1 = -2 - i$, $z_2 = -1 + i$. Вычислите $\frac{z_1}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{z_1}$.

1. Найдите частное: $\frac{4+5i}{-3+i}$ и запишите результат в алгебраической форме.
2. Запишите в алгебраической форме: $\frac{1-3i}{-7+i}$.
3. Запишите в алгебраической форме: $i^{25} - i^{35}$.
4. Запишите в алгебраической форме: $(3i+2)(2i-1)^2$.
5. Запишите в алгебраической форме: $4(2i-3) - 3(5-3i)$.
6. Найдите z , если известно, что $z + 2\bar{z} = -3 - 4i$.

Комплексные числа в тригонометрической форме



$$\text{Тогда } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \left. \begin{array}{l} a = r \cos \varphi \\ b = r \sin \varphi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = a + bi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$$

Пусть $z = |z|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ и $w = |w|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$ — два числа.

$$\text{Тогда } \underline{z \cdot w = |z| \cdot |w|(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))},$$

т.е. при УМНОЖЕНИИ модули чисел умножаются, а *аргументы складываются*;

$$\underline{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}.$$

т.е. при ДЕЛЕНИИ модули чисел делятся, а *аргументы вычитаются*.

Вычислите модуль и аргумент числа $z = -6$.

1. Запишите число 6 в тригонометрической форме.
2. Запишите число -7 в тригонометрической форме.
3. Запишите число $8i$ в тригонометрической форме.
4. Запишите число $-10i$ в тригонометрической форме.
5. Запишите число $-\sqrt{3}+i$ в тригонометрической форме.
6. Запишите число $2+2i$ в тригонометрической форме.

1. Запишите число $-1-\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.
2. Запишите число $5-5i$ в тригонометрической форме.
3. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа -7 .
4. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $8i$.
5. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-10i$.

Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-\sqrt{3}+i$.

1. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $2+2i$.
2. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $-1-\sqrt{3}$.
3. Вычислите модуль и главное значение аргумента числа $5-5i$.
4. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i \sin(\frac{2\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.
5. Приведите число $z = 4(\cos(-\frac{2\pi}{3}) + i \sin(-\frac{2\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.

1. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) + i \sin(\frac{\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.
2. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{3}) - i \sin(\frac{\pi}{3}))$ к алгебраическому виду.
3. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}))$ к алгебраическому виду.
4. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{6}) - i \sin(\frac{\pi}{6}))$ к алгебраическому виду.
5. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{2}) - i \sin(\frac{\pi}{2}))$ к алгебраическому виду.
6. Приведите число $z = 4(\cos(\frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{\pi}{4}))$ к алгебраическому виду.

1. Решите квадратное уравнение: $3iz^2 + (8i + 4)z + 3i + 4 = 0$.

2. Решите квадратное уравнение: $z^2 + 4z + 5 = 0$.

3. Решите квадратное уравнение: $z^2 - 6z + 10 = 0$.

4. Решите квадратное уравнение: $z^2 - 8z + 25 = 0$.

5. Решите квадратное уравнение: $(-4 - 2i)z^2 + (4i + 28)z + 18i - 64 = 0$.

Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=8-3i$.

55. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-2-5i$.

56. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=2-5i$.

57. Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-7-6i$.

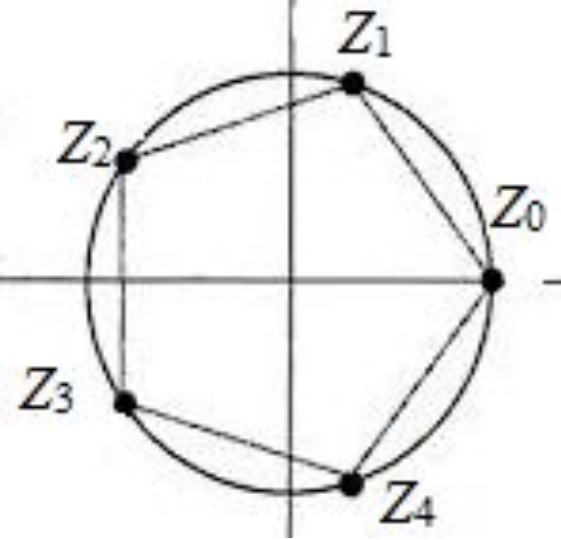
формула Муавра

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Корнем n – й степени из комплексного числа Z называется
комплексное число, n -я степень которого равна Z .

Формула извлечения корней

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \right), \quad k = 0, \dots, n-1$$



Корень имеет ***n значений***, они расположены *на окружности радиуса*

$$\sqrt[n]{|z|}$$

в вершинах *вписанного в нее правильного n-угольника*

Решите уравнение $z^4 = -81$ *над полем*
комплексных чисел

Решите уравнение: $z^3 = 125$.

Решите уравнение: $z^3 = -125$.

Решите уравнение: $z^3 = 125i$.

Решите уравнение: $z^3 = -125i$.

Решите уравнение: $z^4 = 625$.

Решите уравнение: $z^4 = -625$.

Решите уравнение: $z^4 = 625i$.

Решите уравнение: $z^4 = -625i$.

1. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^5} v^4$.
2. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $v = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^3} v^2$.
3. Пусть $u = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$, $v = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^4} v^3$.
4. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^6} v^2$.
5. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^6} v^4$.
6. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^7} v^8$.

1. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^5} v^4$.

2. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$, $v = 3(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^3} v^2$.

3. Пусть $u = 2(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4})$, $v = (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u^4} v^3$.

4. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u}^6 v^2$.
5. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{6} - i \sin \frac{\pi}{6}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u}^6 v^4$.
6. Пусть $u = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}$, $v = 2(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$. Найдите $z = \overline{u}^7 v^8$.