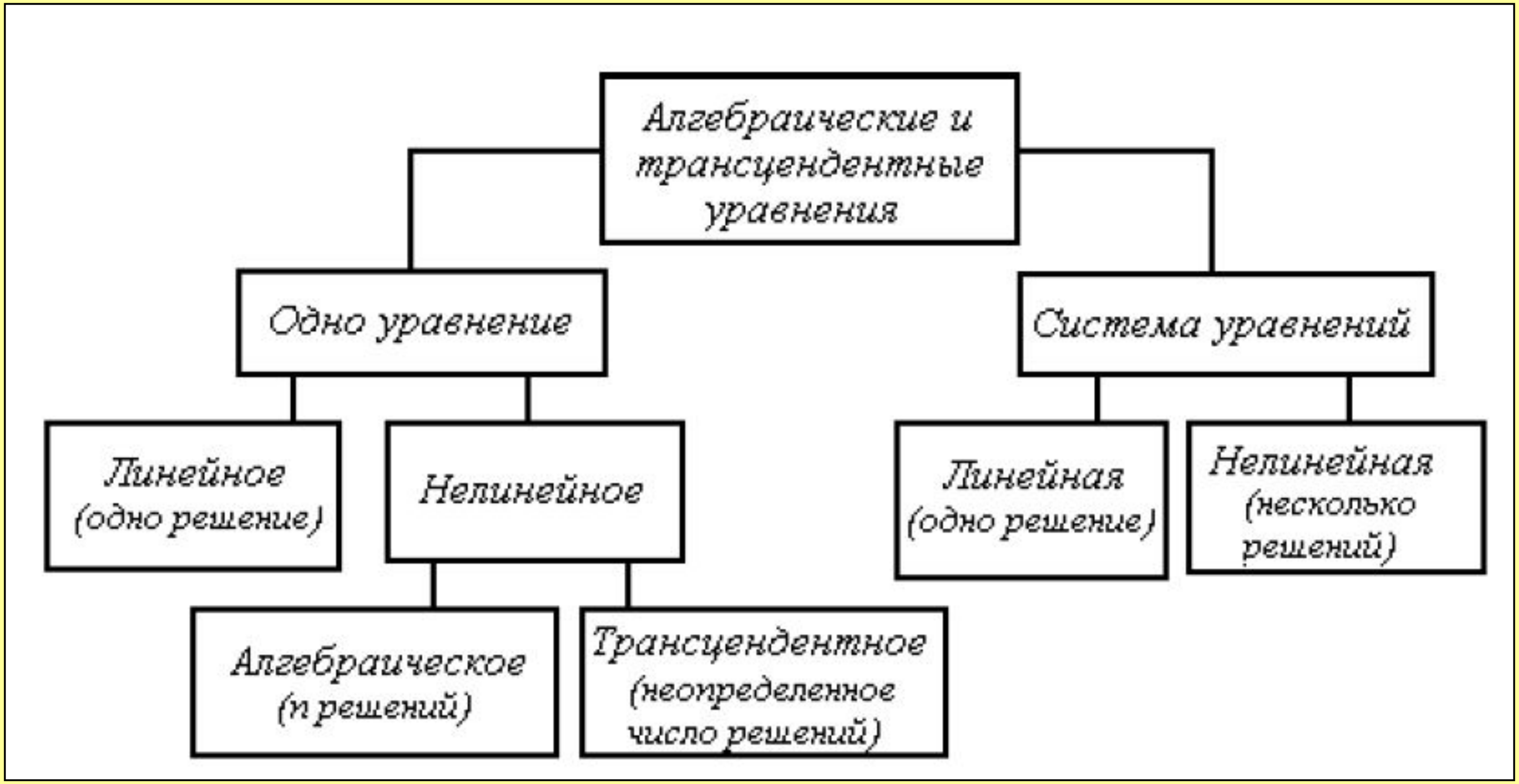
РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТОВ

Классификация уравнений



Алгебраическими уравнениями называют уравнения, содержащие только алгебраические функции (целые, рациональные, иррациональные)

Уравнения, содержащие другие функции (тригонометрические, показательные, логарифмические и др.) называются трансцендентными

Методы решения линейных уравнений

Точные методы

Позволяют записать корни в виде некоторого конечного соотношения (формулы)

Решение с помощью обратной матрицы
Метод Гаусса (алгоритм последовательного исключения неизвестных)
Правило Крамера

Итерационные методы с заданной точностью

Используются для решения уравнений не имеющих аналитического решения

Метод итерации
Метод Зейделя

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Пусть дана система из 3-х уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы неизвестных и свободных членов

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B$$

Пусть определитель матрицы отличен от нуля $|A| \neq 0$. Тогда матричное уравнение решается следующим образом. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1}, обратную матрице A $\quad A^{-1}(AX) = A^{-1}B$ или $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

Поскольку $A^{-1}A = E$ и $E \cdot X = X$, то получаем решение матричного уравнения в виде $X = A^{-1}B$.

Матричным методом можно решать только те системы, в которых <u>число уравнений совпадает с числом неизвестных</u>.

Метод Гаусса

Метод Гаусса является более универсальным и пригоден для систем с любым числом уравнений. Он заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Применяя элементарные преобразования матрицы приведем систему к следующему виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 = b'_2, \\ a''_{33}x_3 = b''_3. \end{cases}$$

Первое уравнение оставим без изменения, а из 2-го и 3-го исключим слагаемые, содержащие x1, а затем из последнего уравнения исключим слагаемое, содержащее x2

К элементарным преобразованиям матрицы относятся следующие преобразования:

1) перестановка строк или столбцов;
2) умножение строки на число, отличное от нуля;
3) прибавление к одной строке другие строки.

Метод итерации

Предполагая, что диагональные коэффициенты *aij* не равны 0 ($i = 1, 2, \ldots, n$), разрешим первое уравнение системы относительно $x1$, второе - относительно $x2$ и т. д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ x_2 = \beta_2 + \alpha_{21}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n, \\ \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot \quad \cdot \cdot \cdot \\ x_n = \beta_n + \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{n,n-1}x_{n-1}, \end{cases}$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}}; \quad \alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}$$

при i не равно j и $a_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$).

Матричная форма записи

x = b + a *x*,

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \ldots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Формула приближения

$$\begin{cases} x_i^{(0)} = \beta_i, \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} = 0; i = 1, \ldots, n; k = 0, 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

Теорема: Процесс итерации для приведенной линейной системы сходится к единственному ее решению, если какая-нибудь каноническая норма матрицы а меньше единицы, т.е. для итерационного процесса

***x* (k+1) = b + a *x* (k).**

достаточное условие есть

$$\|\alpha\| < 1.$$

Методы решения *линейных уравнений* в пакете **MathCAD**

Системы линейных уравнений удобно решать с помощью функции *lsolve*.
lsolve(*A*, *b*) - Возвращается вектор решения *x* такой, что $Ax = b$.
Аргументы: A - квадратная, не сингулярная матрица. b - вектор, имеющий столько же рядов, сколько рядов в матрице A.

Для решение системы линейных уравнений методом Гаусса используются следующие функции:
rref(*A*) - Возвращается ступенчатая форма матрицы *A*.
augment(A, B) - Возвращается массив, сформированный расположением *A* и *B* бок о бок. Массивы *A* и *B* должны иметь одинаковое число строк.
submatrix(*A*, *ir*, *jr*, *ic*, *jc*) - Возвращается субматрица, состоящая из всех элементов, содержащихся в строках с *ir* по *jr* и столбцах с *ic* по *jc*. Удостоверьтесь, что $ir \le jr$ и $ic \le jc$, иначе порядок строк и (или) столбцов будет обращен.

В Mathcad существуют специальные функции для вычисления норм матриц:
normi(*A*) - Возвращает неопределенную норму матрицы *A*.
norm1(*A*) - Возвращает *L1*, норму матрицы *A*. **norm2(*A*)** – *L2*
norme(*A*) - Возвращает Евклидову норму матрицы *A*.

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Mathcad Professional - [Решение матричных уравнений.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Матрица системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица правой части:

$$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Примечание: образцы матрицы и вектора соответствуют линейной системе

$$3x_1 - x_2 = 5$$

$$-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15$$

Вычисление определителя

$$|A| = 5$$

Определитель отличен от нуля,
система имеет единственное решение

Матрицы

Вычисление определителя

Вычисление решения системы

$$x := A^{-1} \cdot b \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение системы с помощью функции lsolve

$$x := \mathrm{lsolve}(A, b) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка правильности решения

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Mathcad Professional - [Метод Гаусса.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Матрица системы:

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Матрица правой части:

$$b := \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Примечание: образцы матрицы и вектора соответствуют линейной системе

$$3x_1 - x_2 = 5$$

$$-2 \cdot x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$2 \cdot x_1 - x_2 + 4 \cdot x_3 = 15$$

$ORIGIN := 1$

Формирование расширенной матрицы системы:

$$Ab := augment(A, b) \qquad Ab = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

augment(A, B) - Возвращается массив, сформированный расположением *A* и *B* бок о бок. Массивы *A* и *B* должны иметь одинаковое число строк.

Приведение расширенной матрицы системы к ступенчатому виду (прямой и обратный ходы метода Гаусса):

$$Ag := rref(Ab) \qquad Ag = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Формирование столбца решения системы:

$$x := submatrix(Ag, 1, 3, 4, 4) \qquad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Проверка правильности решения:

$$A \cdot x - b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Метод итераций

Mathcad Professional - [Метод итераций для линейных систем уравнений.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

$$\beta := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \alpha := \begin{pmatrix} 0 & -0.06 & 0.02 \\ -0.03 & 0 & 0.05 \\ -0.01 & -0.02 & 0 \end{pmatrix}$$

Проверка достаточного условия сходимости (достаточно вычисления одной из функций):

$\mathrm{norm1}(\alpha) = 0.08 \qquad \mathrm{norme}(\alpha) = 0.088882 \qquad \mathrm{normi}(\alpha) = 0.08$

$x^{\langle 0 \rangle} := \beta$ - определение начального приближения решения

$i := 0 .. 4$ - определение количества итераций

$x^{\langle i+1 \rangle} := \beta + \alpha \cdot x^{\langle i \rangle}$ - формула вычислений по методу итераций

Матрица приближенных решений:

$x =$

	0	1	2	3	4	5
0	2	1.92	1.907	1.907036	1.907025	1.907024
1	3	3.19	3.1884	3.18864	3.188647	3.188647
2	5	4.92	4.917	4.917162	4.917157	4.917157

$$\varepsilon := \frac{\left| x^{\langle 5 \rangle} - x^{\langle 4 \rangle} \right|}{\left| x^{\langle 4 \rangle} \right|}$$

- в оценке погрешностей использована Евклидова норма вектора

$\varepsilon = 8.612289 \times 10^{-8}$

Методы решения *нелинейных уравнений*

Большая часть методов предполагает, что известны достаточно малые окрестности, в каждой из которых имеется только один корень уравнения. Принимая за начальное приближение одну из точек этой окрестности, можно вычислить искомый корень с заданной точностью.

Приближенное вычисление корней уравнения

1. Отделение корней уравнения.

Поиск достаточно тесных промежутков, в каждом из которых содержится только один корень уравнения.

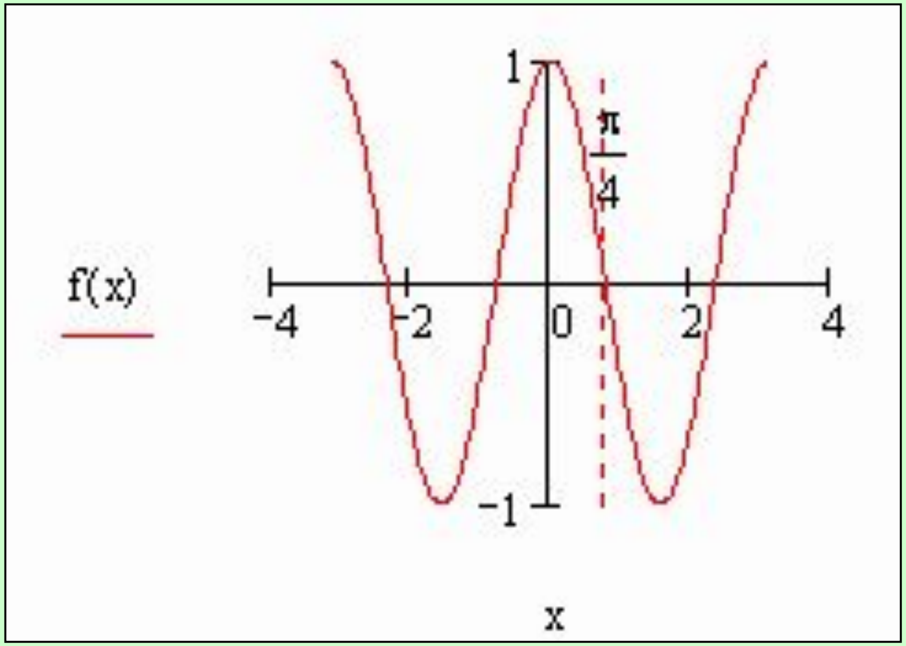
2. Вычисление корня с заданной точностью.

Применяется, если известно некоторое начальное приближение корня в области, не содержащей других корней

Однако, существуют специальные методы решения алгебраических уравнений, не требующих знания начального приближения корня

Отделение корней уравнения f(x)=0.

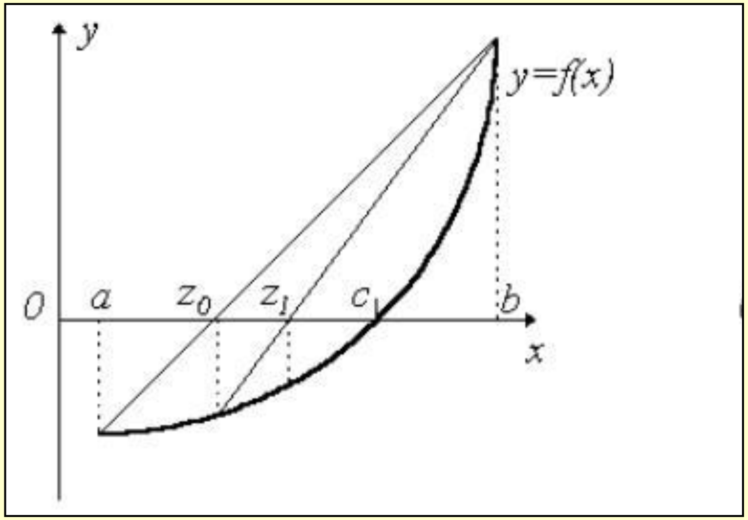
Один из самых простых и распространенных – графический метод решения. Применяется только для грубой оценки корней.



Необходимо построить график функции y=f(x), а затем найти абсциссы точек пересечения этого графика с осью x, которые и будут являться приближенными значениями действительных корней уравнения

Уточнение корней

Метод половинного деления (дихотомии)



Функция f(x)=0 непрерывна на отрезке [a,b] и $f(a)\times f(b)< 0$

1. Находим точку *c=(a+b)/2*.
2. Если *f(a)×f(c)<0*, то корень лежит на интервале [*a,c*], иначе – на интервале [*c*, *b*] .
3. Если величина интервала не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.1

Метод хорд (пропорциональных частей)

Начальные условия те же

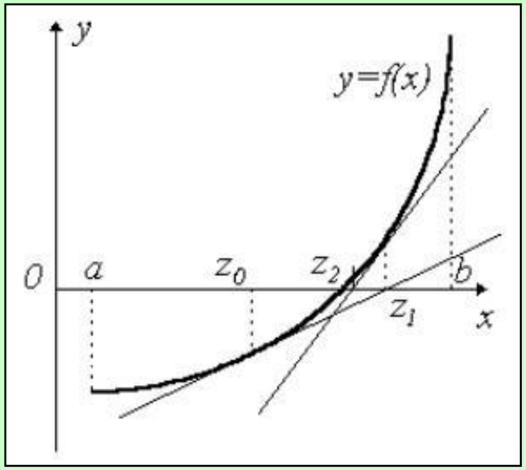
1. Находим точку *z*.

$$Z = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

2. Если *f(a)×f(z)<0*, то корень лежит на интервале [*a,z*], иначе – на интервале [*z*, *b*] .

3. Если величина интервала не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.1

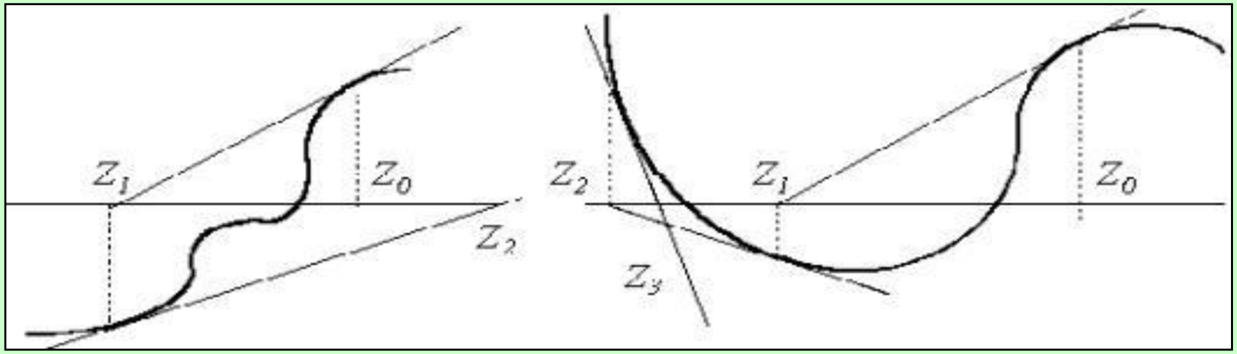
Метод касательных (Метод Ньютона)



1. Определение начального приближения. Если $f(a) \times f''(a) > 0$, то начальное приближение в точке a, иначе - b.
2. Уточняем значение корня

$$X^* \approx Z_{n+1} = Z_n - \frac{f(Z_n)}{f'(Z_n)}.$$

3. Если значение функции не превышает указанной точности, то корень найден с указанной точностью, если нет – повторить п.2



Комбинированный метод

$f(a) \times f(b) < 0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют постоянные знаки на интервале [a,b]

На каждом этапе вычисляется значение по недостатку и значение по избытку точного корня уравнения

Метод простой итерации (последовательных приближений)

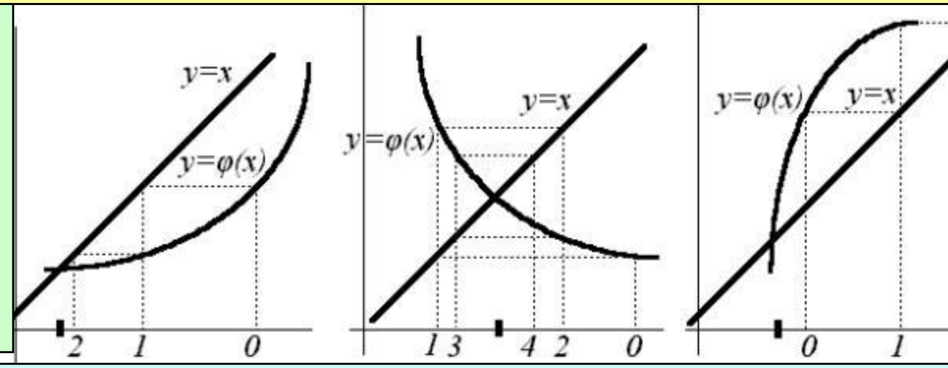
Уравнение $f(x)=0$ заменяется равносильным уравнением $x=\varphi(x)$ и строится последовательность значений $X_{n+1}=\varphi(X_n)$, $n=0,1,2,\ldots$.
Если функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на некотором интервале, причем $|\varphi'(x)|<1$, то эта последовательность сходится к корню уравнения $x=\varphi(x)$ на этом интервале.

Если $f'(x)>0$, то подбор равносильного уравнения можно свести к выбору $\varphi(x)=x-\lambda\cdot f(x)$, где $\lambda>0$ подбирается так, чтобы в окрестности корня $0<\varphi'(x)=1-\lambda\cdot f'(x)\le 1$. Отсюда может быть построен итерационный процесс

$$X_{n+1}=X_n-\frac{f(X_n)}{M},\quad n=0,1,2,\ldots$$

где $M\ge\max|f'(x)|$ (в случае $f'(x)<0$ возьмите функцию $f(x)$ с противоположным знаком).

Первые два демонстрируют одно- и двустороннее приближение к корню, третий же выступает иллюстрацией расходящегося процесса ($|\varphi'(x)|>1$).



Существуют и другие методы (наискорейшего спуска, Эйткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рыбакова и т.д.) уточнения корней, обладающие высокой скоростью сходимости.

Решение *нелинейных уравнений* в **MathCAD**

Для простейших уравнений решение находится с помощью функции *root*.

root(*f*(*x*1, *x*2, …), *x*1, *a*, *b*) - Возвращает значение *x*1, принадлежащее отрезку [*a, b*], при котором выражение или функция *f*(*x*) обращается в 0. Оба аргумента этой функции должны быть скалярами. Функция возвращает скаляр.

Аргументы:

f(x1, x2, ...) - функция, определенная где-либо в рабочем документе, или выражение. Выражение должно возвращать скалярные значения.

x1 - Этой переменной перед использованием функции root необходимо присвоить числовое значение. Является начальным приближением при поиске корня.

a, b - необязательны, если используются, то должны быть вещественными числами, причем a < b.

Для изменения точности, с которой функция *root* ищет корень, нужно изменить значение системной переменной **TOL**. Если значение TOL увеличивается, функция *root* будет сходиться быстрее, но ответ будет менее точен. Если значение TOL уменьшается, то функция *root* будет сходиться медленнее, но ответ будет более точен. Чтобы изменить значение TOL в определенной точке рабочего документа, используйте определение вида $TOL := 0.01$

Polyroots(*v*) - Возвращает корни полинома степени *n*. Коэффициенты полинома находятся в векторе *v* длины *n* + 1. Возвращает вектор длины *n*, состоящий из корней полинома. *Аргументы: v - вектор, содержащий коэффициенты полинома.*

Решение нелинейных уравнений в MathCAD

Mathcad Professional - [Решение уравнений средствами Mathcad.mcd]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение уравнения cos(x) = x + 0.2 с помощью функции root

1 способ

$x := 1$ - начальное приближение

$f(x) := \cos(x) - x - 0.2$

$\mathrm{root}(f(x), x) = 0.616$

2 способ

$x := 1$ - начальное приближение

$\mathrm{root}(\cos(x) - x - 0.2, x) = 0.616$

3 способ

$\mathrm{root}(\cos(x) - x - 0.2, x, 0, 1) = 0.616$

В способах 1 и 2, начальное приближение показывает функции root, где начать искать корень. В способе 3, 3 и 4 параметры определяют область, где искать корень.

В способе 1 первый аргумент - это функция f(x), определенная в документе. В способах 2 и 3 - это выражение.

Пример 2. Нахождение корней полинома $x^4 - 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x - 1$

$$v := \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ -10 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Используйте команду **Символы ⇒ ⇒ Коэффициенты полинома** для создания вектора v

$$\mathrm{polyroots}(v) = \begin{pmatrix} -0.591 \\ 0.305 - 0.277i \\ 0.305 + 0.277i \\ 9.981 \end{pmatrix}$$

Решение *систем нелинейных уравнений* в **MathCAD**

Максимальное число уравнений и переменных равно 50. Результатом решения системы будет численное значение искомого корня.

Для решения системы уравнений необходимо выполнить следующее:

Задать начальное приближение для всех неизвестных, входящих в систему уравнений

Напечатать ключевое слово *Given*. (указывает, что далее следует система уравнений).

Ввести уравнения и неравенства в любом порядке. Используйте [Ctrl]= для печати символа =. Между левыми и правыми частями неравенств может стоять любой из символов <, >.

Введите любое выражение, которое включает функцию *Find*, например: *a*:= *Find*(*x, y*).

Find(z1, z2, . . .) - Возвращает точное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

*Ключевое слово Given, уравнения и неравенства, которые следуют за ним, и какое-либо выражение, содержащее функцию Find, называют **блоком решения уравнений.***

Блоки решения уравнений не могут быть вложены друг в друга, каждый блок может иметь только одно ключевое слово Given и имя функции Find.

Решение *систем нелинейных уравнений* в **MathCAD**

Mathcad Professional - [Решение систем уравнений.MCD]

Файл Правка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ?

Пример 1. Решение системы уравнений с помощью функции Find

$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$ - Начальные приближения

Given

$100 \cdot x1 + 6 \cdot x2 - 2 \cdot x3 = 100$

- Используйте **[Ctrl]=** для печати символа =

$6 \cdot x1 + 200 \cdot x2 - 10 \cdot x3 = 600$

$x1 + 2 \cdot x2 + 100 \cdot x3 = 500$

$$\mathrm{Find}(x1, x2, x3) = \begin{pmatrix} 0.905 \\ 3.219 \\ 4.927 \end{pmatrix}$$

Пример 2. Решение системы уравнений в символьном виде

Given

$x + 2 \cdot \pi \cdot y = a$

$4 \cdot x + y = b$

$$\mathrm{Find}(x, y) \rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{-(-2 \cdot \pi \cdot b + a)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \\ \dfrac{(4 \cdot a - b)}{(-1 + 8 \cdot \pi)} \end{bmatrix}$$

- Используйте **[Ctrl].** (клавиша **Ctrl**, сопровождаемая точкой) для печати символьного знака равенства

Приближенные решения

Функция *Minner* очень похожа на функцию *Find* (использует тот же алгоритм). Если в результате поиска не может быть получено дальнейшее уточнение текущего приближения к решению, *Minner* возвращает это приближение. Функция *Find* в этом случае возвращает сообщение об ошибке. Правила использования функции *Minner* такие же, как и функции *Find.*

minerr(*z*1, *z*2, . . .)- Возвращает приближенное решение системы уравнений. Число аргументов должно быть равно числу неизвестных.

Если *Minner* используется в блоке решения уравнений, необходимо всегда включать дополнительную проверку достоверности результатов.

Символьное решение уравнения

Если решаемое уравнение имеет параметр, то решение в символьном виде может выразить искомый корень непосредственно через параметр. Чтобы решить систему уравнений в символьном виде, необходимо выполнить следующее:

1) Напечатать ключевое слово *Given*.

2) Напечатать уравнения в любом порядке ниже слова *Given*. Удостоверьтесь, что для ввода знака = используется **[Ctrl]=**.

3) Напечатать функцию *Find*, соответствующую системе уравнений.

4) Нажать **[Ctrl].** (клавиша CTRL, сопровождаемая точкой). Mathcad отобразит символьный знак равенства → . 5) Щелкнуть мышью на функции *Find*.

КОНЕЦ ЛЕКЦИИ !